MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
MÜNSTER

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

11. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1921

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
MÜNSTER

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

11. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1921

Inhaltsverzeichnis

Seite

Carlson, F., Über ganzwertige Funktionen 1
Doetsch, G., Über die Cesàrosche Summabilität bei Reihen und eine Erweiterung des Grenzwertbegriffs bei integrablen Funktionen 161
Franck, P., Über affine Geometrie XXXII. Die Asymptotenebenen eines Flächenpunktes und seine Liesche F_2 289
Frank, Ph., Ein Satz über ebene Potentialströmungen 105
Fejér, L. und Riesz F., Über einige funktionentheoretische Ungleichungen . . 305
Hamburger, H., Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion (Zweite Mitteilung) 224
Happel, H., Über das Gleichgewicht von elliptischen Platten 194
Jolles, St., Partiell inverse und partiell involutorische Kollineationen und die Inzidenzen in zwei kollokalen korrelativen Feldern 180
Landau, E., Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen 173
Lichtenstein, L., Über eine Eigenschaft der klassischen Greenschen Funktion 319
Loewy, A., Über algebraische Gleichungen mit reellen Wurzeln und den sogen. casus irreducibilis bei kubischen Gleichungen 108
Neder, L., Über die Koeffizientensumme einer beschränkten Potenzreihe . . . 115
Pasch, M., Der Ursprung des Zahlbegriffs 124
Pöschl, Th., Über eine partikuläre Lösung des biharmonischen Problems für den Außenraum der Ellipse 89
Rademacher, H., Über die asymptotische Verteilung gewisser konvergenzerzeugender Faktoren 276
Scheffers, G., Ebene Berührungskurven zweier Rotationsflächen 315
Schouten, J. A., Über die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Maßbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Maßbestimmung 58
Siegel, C., Darstellung total positiver Zahlen durch Quadrate 246
Szász, O., Über Hermitesche Formen mit rekurrierender Determinante und über rationale Polynome 24
Walther, A., Maximum und Minimum einer harmonischen Funktion auf Kreisen 157
Weyl, G., Die Form des Wirkungsprinzips bei der Bewegung starrer Körper aus Invarianzforderungen abgeleitet 97

Über ganzwertige Funktionen.

Von

Fritz Carlson in Upsala.

§ 1.

1. Es sei $V(x)$ eine ganze Funktion. Wenn die Werte

$$V(n),\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

ganze rationale Zahlen sind, ist $V(x)$ *ganzwertig*. Einfache Beispiele ganzwertiger Funktionen liefern die trigonometrischen Funktionen $\sin \pi x$ und $\cos \pi x$. Allgemeiner erhält man ganzwertige Funktionen bei der Betrachtung verschiedener symmetrischer Funktionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung von der Form

$$e(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0 \qquad (a_n = \pm 1) \tag{1}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten a_ν. Denn die Potenzsummen der Wurzeln einer Gl. (1) sind bekanntlich ganze rationale Zahlen und die Funktion

$$\sum_z z^{-x}, \tag{2}$$

wo über die Wurzeln z von (1) summiert wird, ist daher ganzwertig. So liefert z. B. die Gleichung

$$z^2 - z + 1 = 0 \tag{3}$$

die Funktion $2 \cos \frac{\pi x}{3}$ und die Gleichung

$$z^2 - 3z + 1 = 0 \tag{4}$$

die Funktion

$$G_0(x) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x.$$

Man kann noch andere symmetrische Funktionen der Wurzeln der Gl. (1) bilden, die ganzwertige Funktionen darstellen, z. B. die Funktion

$$\frac{z_1^{-x} - z_2^{-x}}{z_1 - z_2} \tag{5}$$

der Wurzeln der Gleichung

$$z^2 + az + 1 = 0.$$

Für $a = -1, -3$ geht diese Gleichung in (3) bzw. (4) und die Funktion (5 in $-\frac{2}{\sqrt{3}} \sin\frac{\pi x}{3}$ bzw. in $-U_0(x)$, wo

$$U_0(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right\}$$

über. Noch andere derartige Funktionen werden sich aus den folgende Betrachtungen ergeben.

2. Es gibt ganzwertige Polynome von beliebigem Grade. Die Beispie oben liefern ganzwertige transzendente Funktionen, deren Anwachsen m einer Exponentialfunktion verglichen werden kann. Diese Exponentia funktion kann aber nicht zu langsam anwachsen, so daß, in bezug auf d Anwachsen, eine Lücke existiert zwischen den Polynomen und den tra szendenten Funktionen. Um diese Ausdrucksweise zu präzisieren, sei $M($ das Maximum des Betrages der Funktion für $|x| = r$. Dann hat He Pólya bewiesen[1]):

Wenn für eine ganzwertige Funktion

$$\lim_{r=\infty} M(r)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{-r} r^{\frac{3}{2}} = 0$$

gilt, so ist diese Funktion ein Polynom.

Die Konstante $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ kann durch keine kleinere ersetzt werden, w die Beispiele $U_0(x)$, $G_0(x)$ zeigen. Betrachtet man allgemeiner *diejenig ganzwertigen Funktionen, für welche*

$$M(r) < \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^r e^{r\varepsilon(r)}, \quad \lim \varepsilon(r) = 0, \tag{6}$$

so kommen unter diesen die Funktionen $U_0(x)$, $G_0(x)$ vor. Man ka zeigen, *daß alle anderen lineare Kombinationen von diesen mit Polynom sind, d. h. daß sie die Form*

$$r(x) + q(x)\,G_0(x) + p(x)\,U_0(x) \tag{7}$$

haben müssen, wo p, q, r Polynome sind.

Dies ist nur ein spezieller Fall eines allgemeinen Satzes, zu dem m gelangt, wenn man sich die Aufgabe stellt, diejenigen ganzwertigen u transzendenten Funktionen zu bestimmen, die am langsamsten anwachs Dabei muß der Ausdruck „anwachsen" noch näher präzisiert werden.

[1]) Vgl. G. Pólya, Über ganzwertige ganze Funktionen, Rend. del Circolo Ma matico di Palermo, 40 (1915), S. 1–16.

Es handelt sich hier um ganze Funktionen des Pringsheimschen Mitteltypus, d. h. Funktionen $F(x)$, die folgende Eigenschaft besitzen. Es gibt eine endliche und von Null verschiedene Größe η derart, daß, wie klein die positive Zahl ε auch genommen werde, die Ungleichung

$$M(r) < e^{(\eta+\varepsilon)r} \tag{8'}$$

für *alle* hinreichend große r und die Ungleichnng

$$M(r) > e^{(\eta-\varepsilon)r} \tag{8''}$$

für *beliebig große* r erfüllt sind. Wird nun

$$x = re^{i\varphi}, \quad -\pi \leqq \varphi \leqq \pi$$

gesetzt, so hat

$$\limsup_{r=\infty} \sqrt[r]{|F(re^{i\varphi})|}$$

einen endlichen und, wie in der Funktionentheorie bewiesen wird, von Null verschiedenen Wert, so daß man

$$\limsup_{r=\infty} \sqrt[r]{|F(re^{i\varphi})|} = e^{f(\varphi)} \tag{9}$$

schreiben kann. Man weiß, daß $f(\varphi)$ eine stetige Funktion von φ ist, wobei man φ auf dem Einheitskreise deuten kann. Diese stetige Funktion hat in $(-\pi, \pi)$ einen größten Wert, der offenbar die Größe η in (8) ist. In einem rechtwinkligen Koordinatensysteme wird $y = f(\varphi)$ durch eine stetige Kurve $f(\varphi)$ dargestellt.

Nehmen wir jetzt an, daß die Funktion $F(x)$ ganzwertig ist, so folgt aus dem Satze des Herrn Pólya, daß die Kurve $f(\varphi)$ nicht ganz unterhalb der Geraden $y = \log\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ liegen kann. Sie muß mindestens einen Punkt mit dieser Geraden gemeinsam haben. Es liegt nun nahe zu untersuchen, ob man, ohne die Gültigkeit des erwähnten Satzes aufzuheben, die Gerade $y = \log\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ durch eine Kurve $y = \lambda(\varphi)$ ersetzen kann, die *oberhalb* jener Geraden liegt. Immer muß doch eine solche Kurve, wenn sie nun vorhanden ist, einen Punkt gemeinsam mit der Geraden haben.

Wir wollen die Existenz einer solchen Kurve nachweisen. Sie wird folgendermaßen definiert. Es sei

$$\xi = Re^{i\psi}$$

ein Punkt des Cassinischen Ovales

$$|\xi - 1|\,|\xi + 1| = 4$$

mit den Brennpunkten ± 1. Durch

$$\left|\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)^{-\xi}\right| = e^{R\lambda(\psi)} \tag{10}$$

wird eine in $(-\pi, \pi)$ stetige Funktion $\lambda(\varphi)$ definiert. Man könnte sogleich aus (10) einen expliziten Ausdruck für $\lambda(\varphi)$ erhalten. Dies haben wir nicht nötig. Aus der geometrischen Definition folgt, daß

$$\lambda(\varphi) = \lambda(-\varphi) = \lambda(\pi \pm \varphi),$$

so daß man nur $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ zu betrachten hat. Es ist

$$\lambda(0) = \log\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \tag{11}$$

und (wie unten gezeigt wird) für $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

$$\lambda'(\varphi) > 0, \tag{12}$$

so daß in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\log\frac{3+\sqrt{5}}{2} < \lambda(\varphi) < \frac{\pi}{3}. \tag{13}$$

Es ist also $\lambda(\varphi) = \log\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ für $\varphi = 0, \pm\pi$; im übrigen liegt aber die Kurve $\lambda(\varphi)$ oberhalb der Geraden.

Diese Kurve $\lambda(\varphi)$ hat nun wirklich den Charakter einer *Grenzkurve* hinsichtlich der ganzwertigen transzendenten Funktionen. Ich werde nämlich zeigen:

Es sei $V(x)$ eine ganzwertige ganze Funktion und

$$\limsup_{r=\infty} \sqrt[r]{|V(re^{i\varphi})|} = e^{v(\varphi)}. \tag{14}$$

Für jene Funktionen, für welche

$$v(\varphi) \leqq \lambda(\varphi)$$

sind drei Fälle möglich.

1. *Es ist für alle φ*

$$v(\varphi) < \lambda(\varphi).$$

Dann ist $V(x)$ ein Polynom.

2. *Es ist immer $v(\varphi) \leqq \lambda(\varphi)$ und*

$$v(\varphi) = \lambda(\varphi)$$

nur für endlich viele φ. Dann kann die ganze Zahl p so bestimmt werden, daß diese φ-Werte modulo π *mit den Argumenten der Wurzeln x der Gleichung*

$$\left(\frac{x^2-1}{4}\right)^p = 1 \tag{15}$$

kongruent sind. Mit diesem p bilde man die Gleichung

$$\left(z + \frac{1}{z} - 2\right)^p = 1. \tag{16}$$

Dann ist $V(x)$ eine symmetrische Funktion der Wurzeln z dieser Gleichung und zwar von der Form

(17) $$V(x) = p(x) + \sum_z p_z(x) z^{-x},$$

wo $p(x)$, $p_z(x)$ Polynome sind.

3. *Es ist immer $v(\varphi) \leqq \lambda(\varphi)$ und*

$$v(\varphi) = \lambda(\varphi)$$

für unendlich viele φ. Dann muß für jedes φ entweder $v(\varphi)$ oder $v(\varphi \pm \pi)$ den Wert $\lambda(\varphi)$ haben. In der Tat gibt es ganzwertige Funktionen mit dieser Eigenschaft.

Wir wollen den Satz mit folgenden Beispielen beleuchten. Es sei

(18) $$|V(re^{i\varphi})| < e^{\frac{\pi}{3} r |\sin\varphi|} \cdot e^{r\varepsilon(r)}.$$

Weil (vgl. die Fußnote 2) für $0 \leqq \varphi < \frac{\pi}{2}$

(19) $$\frac{\pi}{3} \sin\varphi < \lambda(\varphi),$$

so sind die φ-Werte (15)

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Also $p = 2$; die Gl. (16) wird also

$$z + \frac{1}{z} - 2 = \pm 1,$$

d. h.

$$z = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; \qquad z = e^{\pm \frac{\pi i}{3}}.$$

In (17) müssen, nach (18), die Koeffizienten von

$$\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^{-x}$$

Null sein. Also: *die ganzwertigen Funktionen, die* (18) *erfüllen, sind in*

$$p(x) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\frac{\pi x}{3} + q(x) \cos\frac{\pi x}{3} + r(x)$$

enthalten.

Es sei noch

$$M(r) < \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^r \cdot e^{r\varepsilon(r)}.$$

Die φ-Werte (15) sind

$$\varphi = 0.$$

Also $p = 1$ und

$$V(x) = p(x) U_0(x) + q(x) G_0(x) + r(x).$$

3. Um die Funktionen, die im Falle 3 auftreten, darstellen zu können müssen wir eine neue Reihenentwicklung ganzer Funktionen betrachten. Denn offenbar läßt die gewöhnliche Potenzreihenentwicklung nicht in einfacher Weise die Ganzwertigkeit der Funktion zum Vorschein kommen. Man gelangt zu dieser Entwicklung, indem man zunächst eine Darstellung der ganzwertigen Polynomen sucht. Diese sind ja nicht etwa in

$$\sum_{\nu=0} a_\nu x^\nu$$

enthalten, wo die a_ν ganze Zahlen sind.

Wird, wie gewöhnlich,

$$(20) \qquad \binom{x+\nu-1}{2\nu-1} = \frac{1}{\lfloor 2\nu-1} \cdot x(x^2-1^2)(x^2-2^2)\dots(x^2-(\nu-1)^2)$$

gesetzt, so ist dies ein ungerades Polynom vom Grade $(2\nu-1)$, das ganzwertig ist, und zwar nimmt es für $x = 0, 1, \dots, \nu-1$ den Wert 0, für $x = \nu$ den Wert 1 an. Mithin ist es möglich die Größen u_ν zu bestimmen derart, daß das Polynom

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \binom{x+\nu-1}{2\nu-1}$$

für $x = 1, 2, \dots n$ vorgelegte Werte annimmt. Diese Werte sind dann und nur dann ganze Zahlen, wenn alle u_ν ganze Zahlen sind.

Eine entsprechende Darstellung für die geraden ganzwertigen Polynomen erhält man, indem man das zu (20) analoge gerade Polynom bestimmt, das also ganzwertig sein soll und für $x = 0, 1, \dots, \nu-1$ den Wert 0, für $x = \nu$ den Wert 1 annehmen soll. Es ist dies das Polynom

$$\frac{x}{\nu}\binom{x+\nu-1}{2\nu-1},$$

denn aus der Identität

$$\frac{x}{\nu}\binom{x+\nu-1}{2\nu-1} = \binom{x+\nu-1}{2\nu} + \binom{x+\nu}{2\nu}$$

folgt die Ganzwertigkeit. Also können die Größen g_ν so bestimmt werden daß das Polynom

$$g_0 + \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu \frac{x}{\nu}\binom{x+\nu-1}{2\nu-1}$$

für $x = 0, 1, \dots, n$ vorgelegte Werte annimmt. Diese Werte sind dann und auch nur dann ganze Zahlen, wenn die g_ν ganze Zahlen sind. Mithin

Die ganzwertigen Polynomen $P(x)$ vom Grade $\leqq 2m$ sind in

$$2P(x) = g_0 + \sum_{\nu=1}^{m}\left(u_\nu + g_\nu \frac{x}{\nu}\right)\binom{x+\nu-1}{2\nu-1}$$

enthalten. Damit $P(x)$ ganzwertig ist, ist notwendig und hinreichend, daß u_ν, g_ν ganze Zahlen von gleicher Parität sind.

Man betrachte jetzt die unendliche Reihe

$$2V(x) = g_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(u_\nu + g_\nu \frac{x}{\nu}\right) \binom{x+\nu-1}{2\nu-1}. \tag{21}$$

Lassen wir zunächst die Konvergenzfrage beiseite, so findet man sofort, daß die Koeffizienten u_ν, g_ν sich sukzesiv aus $V(n)$, $n = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \nu$ bestimmen lassen, und daß $V(x)$ dann und nur dann ganzwertig ist, wenn die Koeffizienten u_ν, g_ν ganze Zahlen von gleicher Parität sind

Was dann die Konvergenzfrage betrifft, so gilt der folgende Satz:

Wenn u_ν, g_ν die Bedingungen

$$\limsup \sqrt[\nu]{|u_\nu|} \leqq 1; \quad \limsup \sqrt[\nu]{|g_\nu|} \leqq 1 \tag{22}$$

erfüllen, so stellt

$$2F(x) = g_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(u_\nu + g_\nu \frac{x}{\nu}\right) \binom{x+\nu-1}{2\nu-1} \tag{23}$$

eine ganze Funktion dar, die für alle φ

$$\limsup \sqrt[r]{|F(re^{i\varphi})|} \leqq e^{\lambda(\varphi)} \tag{24}$$

genügt. Umgekehrt, wenn eine ganze Funktion $F(x)$ der Relation (24) genügt, so kann sie in eine Reihe (22) entwickelt werden, deren Koeffizienten die Bedingungen (22) erfüllen.

Also: *Die ganzen Funktionen, die in dem angekündigten Satze in* 2. *in Betracht kommen, können durch* (21) *dargestellt werden, wo u_ν, g_ν ganze Zahlen von gleicher Parität sind, die noch die Bedingungen* (22) *erfüllen.*

Die drei Fälle des erwähnten Satzes hängen von den Koeffizienten u_ν, g_ν in folgender Weise ab. Im ersten Falle ist $u_\nu = g_\nu = 0$ für $\nu > \nu_0$.

Im zweiten Falle stellen die Reihen

$$\sum_{1}^{\infty} u_\nu t^\nu, \qquad \sum_{1}^{\infty} g_\nu t^\nu \tag{25}$$

rationale Funktionen von t dar.

Im dritten Falle haben beide Reihen (25) oder wenigstens die eine den Einheitskreis zu singulärer Linie.

Als Beispiel zum letzten Falle nehme man

$$U(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{x+\nu^2-1}{2\nu^2-1}. \tag{26}$$

$U(x)$ ist eine ganze ganzwertige Funktion, und

$$\limsup \sqrt[r]{|U(re^{i\varphi})|} = e^{\lambda(\varphi)}$$

für alle φ.

Für den Beweis mache ich von Betrachtungen und Sätzen Gebrauch, die ich schon früher entwickelt habe. Ich habe es aber doch für zweckmäßig gehalten, diese Sätze, insoweit sie hier zur Anwendung kommen, in § 2 kurz herzuleiten.

§ 2.

4. Es sei z ein fester Punkt der z-Ebene. Dann ist

$$z^{-x}$$

eine ganze Funktion von x, deren Anwachsen durch

$$|z^{-e^{i\varphi}}| \tag{27}$$

angegeben wird, wenn man

$$x = re^{i\varphi}$$

setzt. Wenn φ das Intervall $(-\pi, \pi)$ durchläuft, so nimmt (27) Werte an, die von der Lage von z abhängen. Wir wollen in dieser Hinsicht einige einfache und wichtige Eigenschaften von (27) herleiten.

In der z-Ebene betrachte man eine einfache geschlossene Kurve L. O sei ein Punkt außerhalb L, von dem aus an L zwei Tangenten OA, OB gelegt werden können; A, B seien die Berührungspunkte. Die Punkte von L liegen also im Winkelfelde $BOA\,(W)$; man kann annehmen, daß dies erhalten wird; indem sich ein Halbstrahl durch O im positiven Sinne von OB nach OA dreht. Ein Halbstrahl innerhalb W soll L in zwei Punkten schneiden. Diese werden mit P_1, P_2 so bezeichnet, daß $OP_1 < OP_2$. Der Bogen BP_1A wird mit L_1, der Bogen BP_2A mit L_2 bezeichnet.

Wir setzen voraus, daß L in jedem Punkte eine bestimmte Tangente hat, die stetig variiert. In P_1, P_2 betrachte man die positiven Halbtangenten, die in der Richtung des positiven Drehungssinnes gezogen werden. Der Winkel in P_1, P_2 zwischen der positiven Halbtangente und OP_1 bzw. OP_2 wird mit μ_1 bzw. μ_2 bezeichnet. Dann wird die wesentliche Annahme sein, *daß μ_1 und μ_2 monoton variieren, wenn P_1 bzw. P_2 den Bogen L_1 bzw. L_2 beschreibt.* Wenn also P_1 den Bogen L_1 durchläuft von B nach A, so soll μ_1 abnehmend von π bis 0 variieren; wenn P_2 den Bogen L_2 durchläuft von B nach A, so soll μ_2 wachsend von 0 bis π variieren.

Eine jede Kurve mit den hier aufgezählten Eigenschaften wollen wir mit L bezeichnen.

In einer x-Ebene betrachte man den Einheitskreis, dessen Punkte die Koordinaten

$$e^{i\varphi}, \qquad -\pi \leqq \varphi \leqq \pi,$$

haben.

(a) *Durch die Beziehungen*

$$\text{(28)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \cot\mu_1 \quad \text{für} \quad |\varphi| \leqq \tfrac{\pi}{2} \\ \operatorname{tg}\varphi &= \cot\mu_2 \quad \text{für} \quad |\varphi| \geqq \tfrac{\pi}{2} \end{aligned}$$

wird L eineindeutig und stetig auf dem Einheitskreise abgebildet. Oder: die Punkte von L werden den Halbstrahlen $\arg x = \varphi$ eineindeutig und stetig zugeordnet.

Derjenige Punkt von L, der dem Punkte $e^{i\varphi}$ entspricht, wird mit z_φ bezeichnet.

5. In der z-Ebene führen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein mit dem Nullpunkte in O. Wir wollen dies in der Weise tun, daß die negative reelle Achse die Kurve L nichtreell schneidet. Werden die Punkte der z-Ebene

$$z = \varrho e^{i\psi}$$

geschrieben, so wird immer

$$\text{(29)} \qquad -\pi \leqq \psi \leqq \pi$$

angenommen, und wenn

$$\arg OA = \alpha, \qquad \arg OB = \beta$$

gesetzt wird, so ist nach unsrer Voraussetzung

$$\text{(30)} \qquad -\pi < \beta < \alpha < \pi,$$

und die Punkte von L liegen innerhalb des Winkelraumes

$$\beta \leqq \psi \leqq \alpha.$$

Wir betrachten den Wert von (27), wenn z die Kurve L durchläuft. Es ergibt sich unmittelbar aus (28):

(b) *Wird φ festgehalten und durchläuft z die Kurve L, so nimmt* (27) *seinen größten Wert in dem Punkte $z = z_\varphi$ an*, d. h.

$$\text{(31)} \qquad \operatorname{Max} \left| z^{-e^{i\varphi}} \right| = \left| z_\varphi^{-e^{i\varphi}} \right|.$$

In allen anderen Punkten von L ist

$$\text{(32)} \qquad \left| z^{-e^{i\varphi}} \right| < \left| z_\varphi^{-e^{i\varphi}} \right|.$$

Wird φ festgehalten, so nimmt (27) denselben Wert an für alle z, die einer

logarithmischen Spirale angehören, und zwar nimmt (27) den Wert (31) an längs der Spirale

$$|z - e^{i\varphi}| = |z_\varphi - e^{i\varphi}|, \tag{33}$$

die L in z_φ berührt. Wir betrachten alle diese logarithmischen Spiralen mit O als Pol, die L berühren, und zwar von jeder nur den Umlauf (29). Aus den Eigenschaften von L folgt sofort, daß jede Spirale nur den Berührungspunkt mit L gemeinsam hat. Läßt man den Berührungspunkt die Kurve L durchlaufen, und betrachtet man die Schnittpunkte aller Spiralen mit einem beliebigen Halbstrahle durch O, so findet man, daß durch jeden Punkt R außerhalb L immer zwei Spirale gehen, die L berühren. Die Berührungspunkte P, Q teilen L in zwei Bögen PQ. Ihnen entsprechen zwei Bögen auf dem Einheitskreise $e^{i\varphi}$. Innerhalb dieser Bögen nimmt der Ausdruck (27) Werte an, die $>$ bzw. $< |z_\varphi - e^{i\varphi}|$ sind. Man folgert hieraus:

(c) *Es sei z ein fester Punkt der z-Ebene. Wenn z außerhalb L liegt, so gibt es ein Teilintervall von φ $(-\pi, \pi)$, für welches*

$$|z - e^{i\varphi}| > |z_\varphi - e^{i\varphi}|.$$

Wenn dagegen z innerhalb L liegt, so ist für alle φ

$$|z - e^{i\varphi}| < |z_\varphi - e^{i\varphi}|.$$

6. Wir hatten oben vorausgesetzt, daß die Kurve L eine stetig variierende Tangente hat. Dies ist nun nicht notwendig; es können z. B. Ecken zugelassen werden. Auch könnte man den Fall betrachten, daß μ auf gewissen Bögen konstant bleibt. Die Abänderungen, die in den obigen Betrachtungen vorzunehmen sind, sind ersichtlich. Verallgemeinerungen dieser Art ließen sich auch in den folgenden Betrachtungen durchführen, haben aber für die Anwendungen, die wir hier beabsichtigen, keine Bedeutung. Wir lassen sie daher beiseite. Um die Darstellung abkürzen zu können wollen wir vielmehr der Kurve L eine einschränkende Bedingung auferlegen.

Die Gleichung von L sei

$$\varrho = e^{U(\psi)}, \qquad \beta \leqq \psi \leqq \alpha,$$

wo dann $U = U_1(\psi)$ auf L_1 und $U = U_2(\psi)$ auf L_2 zu schreiben ist. Wir nehmen nun an, daß $U''(\psi)$ einen bestimmten, endlichen und von Null verschiedenen Wert hat für $\beta < \psi < \alpha$. *Im folgenden wird mit L eine jede Kurve bezeichnet, die diese und die in 4. aufgezählten Bedingungen erfüllt.* Nach der Voraussetzung über den Winkel μ ist dann $U_1'' > 0$, $U_2'' < 0$ innerhalb (β, α).

Wird

$$|z_\varphi - e^{i\varphi}| = e^{l(\varphi)} \tag{34}$$

gesetzt, so ist

$$l(\varphi) = -\cos\varphi\, U(\psi) + \psi \sin\varphi,$$

wo ψ der Gleichung

$$U'(\psi) = \operatorname{tg}\varphi$$

zu entnehmen ist. Man findet

$$l'(\varphi) = \sin\varphi\, U(\psi) + \psi\cos\varphi, \tag{35}$$

$$l(\varphi) + l''(\varphi) > 0. \tag{36}$$

Gl. (35) gilt zunächst nur für $|\varphi| \neq \pi : 2$; man verifiziert aber leicht, daß sie für alle φ gilt. Man sieht, daß $l(\varphi)$ und $l'(\varphi)$ für alle φ stetig sind, daß $l''(\varphi)$ einen bestimmten, endlichen Wert für $|\varphi| \neq \pi : 2$ hat, der (36) erfüllt. Außerdem ist

$$\alpha = l\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad \beta = l\left(\frac{-\pi}{2}\right),$$

so daß

$$l\left(\frac{-\pi}{2}\right) < l\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

und beide Größen absolut kleiner als π sind. *Eine jede Funktion, die diese Eigenschaften hat, werden wir mit $l(\varphi)$ bezeichnen.* Zu jeder L-Kurve gehört also eine l-Funktion, die (34) genügt. Umgekehrt, ist eine beliebige l-Funktion gegeben, so läßt sich eine L-Kurve bestimmen, längs deren (34) gilt. Denn aus

$$U(\psi) = -\cos\varphi\, l(\varphi) + \sin\varphi\, l'(\varphi)$$

$$\psi = \sin\varphi\, l(\varphi) + \cos\varphi\, l'(\varphi)$$

folgen alle oben vorausgesetzten Eigenschaften der Funktion $U(\psi)$. Also:

(d) *Zu jeder L-Kurve gehört eine l-Funktion, die* (34) *erfüllt, und umgekehrt gehört zu jeder l-Funktion eine L-Kurve, längs deren* (34) *gilt.*

7. Es sei $f(\varphi)$ eine beliebige stetige Funktion, für welche die Größen

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad f\left(\frac{-\pi}{2}\right) \tag{37}$$

absolut kleiner als π sind. Dann ist es möglich, und zwar in unendlich vielen Weisen, eine l-Funktion zu bestimmen derart, daß für alle φ

$$f(\varphi) < l(\varphi).$$

Für eine jede ganze Funktion des Mitteltypus $F(x)$, für welche also (9)

gilt, und für welche die Größen (37) absolut kleiner als π sind, läßt sich eine l-Funktion angeben derart, daß

$$\limsup_{r=\infty} \sqrt[r]{|F(re^{i\varphi})|} \leqq e^{l(\varphi)}. \tag{38}$$

(e) *Es sei $F(x)$ eine ganze Funktion von x, die* (38) *erfüllt. Dann stellt die Reihe*

$$H(z) = \sum_0^\infty F(n) z^n \tag{39}$$

eine Funktion von z dar, die außerhalb der zu $l(\varphi)$ gehörigen L-Kurve regulär ist, im Unendlichen regulär und Null ist.

Umgekehrt, *wenn eine Funktivn $H(z)$ regulär ist außerhalb einer gegebenen L-Kurve, im Unendlichen regulär und Null ist, so kann sie durch eine Reihe* (39) *dargestellt werden, wo $F(x)$ eine ganze Funktion bezeichnet, die* (38) *genügt, und zwar mit der zu L gehörigen l-Funktion.*

Diese ganze Funktion $F(x)$ ist eindeutig bestimmt.

Dann und nur dann wenn der Punkt z_φ auf L eine singuläre Stelle für $H(z)$ ist, gilt, längs des entsprechenden Strahles $\arg x = \varphi$, in (38) *das Gleichheitszeichen*:

$$\limsup_{r} \sqrt[r]{|F(re^{i\varphi})|} = e^{l(\varphi)}. \tag{40}$$

Wird (40) in der Form

$$\limsup_{r} \sqrt[r]{|F(re^{i\varphi})|} = \left| z_\varphi^{-e^{i\varphi}} \right|$$

geschrieben, so kann sie gewissermaßen als eine Verallgemeinerung der Hadamard-Cauchyschen Bestimmung des Konvergenzradius aufgefaßt werden.

Um **(e)** zu beweisen, führen wir zur Abkürzung die Bezeichnung

$$\int^{(\varphi)} dx$$

ein. Es sei γ eine positive Größe kleiner als 1. Dann soll, bei der Integration, x den kleinsten Bogen auf $|x| = \gamma$ durchlaufen, der von $x = \gamma$ nach $x = \gamma e^{i\varphi}$ fährt, dann den Vektor $\arg x = \varphi$ von $|x| = \gamma$ nach $x = \infty$ durchlaufen. Dies vorausgeschickt, wird man ohne Schwierigkeit die Richtigkeit der Formel bestätigen:

$$H(z) - H(0) = \int^{(\varphi)} F(x) z^x dx + H_1(z) \tag{41}$$

$$H_1(z) = -\int^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} F(x) z^x \frac{e^{2\pi i x}}{e^{2\pi i x} - 1} dx + \int^{\left(-\frac{\pi}{2}\right)} F(x) \frac{z^x}{e^{2\pi i x} - 1} dx.$$

Für ein bestimmtes φ innerhalb $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt diese Darstellung z. B. für reelle z, die größer als Null und kleiner als eine gewisse Größe sind. Sie gilt dann auch in einem Bereiche, das einen Teil des genannten Intervalles enthält und wo die Integrale gleichmäßig konvergieren. Wir lassen zunächst die Punkte $z = 0, \infty$ außer Betracht.

Die Funktion $H_1(z)$ ist für

$$-\pi \leqq \arg z \leqq \pi$$

regulär.

Es sei P_1 ein Punkt von L_1; er kann mit z_φ bereichnet werden, wo $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, wenn P_1 nicht mit A oder B zusammenfällt. Weil

$$|F(re^{i\varphi})| < |z_\varphi^{-x}|\, e^{r\varepsilon(r)},$$

so ist das Integral in (41) gleichmäßig konvergent in einem jeden Gebiete das innerhalb

$$\left|\left(\frac{z}{z_\varphi}\right)^x\right| = 1$$

liegt, nach (33) also innerhalb der Spirale, die L in P_1 berührt. Hätt man, statt P_1, einen Punkt P_2 von L_2 betrachtet, so würde sich in ähn licher Weise ergeben haben, daß das fragliche Integral gleichmäßig kon vergiert in jedem endlichen Bereiche, das außerhalb der in P_2 berührenden Spirale liegt. Man lasse nun φ das Intervall $(-\pi, \pi)$ durchlaufen. Zu jedem φ enthält man ein Gebiet, wo das Integral in (41) gleichmäßig konvergiert, und für je zwei benachbarte Werte von φ haben diese Gebiete einen Teil gemeinsam. Also: außerhalb L hat $H(z)$ keine singuläre Stelle.

Wir hatten die Punkte $z = 0, \infty$ ausgenommen. Der erstere ist eine reguläre Stelle für denjenigen Zweig von $H(z)$, der hier in Betracht kommt. In der Umgebung des letzteren gilt die Entwicklung

$$H(z) = -\sum_{n=-1}^{\infty} F(n) z^n, \tag{42}$$

wie man sofort durch Grenzübergang $\lim m = \infty$ aus

$$\sum_{n=-m}^{\infty} F(n) z^n = -\int_{-m-\frac{1}{2}-i\infty}^{-m-\frac{1}{2}+i\infty} F(x) \frac{z^x}{e^{2\pi i x} - 1}\, dx$$

bestätigt. Dann ist der erste Teil von (e) bewiesen.

Die Umkehrung folgt aus der Betrachtung des Integrales

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^*} H(z) \frac{dz}{z^{x+1}}, \tag{43}$$

wo L^* eine einfache geschlossene Kurve bezeichnet, die $z = 0$ außerhalb

und L innerhalb läßt. Denn für positives und ganzes x läßt sich der Integrationsweg in eine Kurve deformieren, die $z = 0$ umschließt. Und bei der Abschätzung von $F(x)$ hat man L^* hinreichend nahe an L zu wählen und das Maximum von $z^{-x}|$ auf L zu betrachten. Dann ergibt sich unmittelbar (38).

Um zu zeigen, daß es nur eine ganze Funktion $F(x)$ gibt, die für $x = 0, 1, 2, \ldots$ die Koeffizienten $F(n)$ der Entwicklung von $H(z)$ um $z = 0$ liefert, und die außerdem die Ungleichung (38) erfüllt, hat man nur zu beachten, daß $l(\varphi)$ endlich ist, und daß die Größen $l\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $l\left(\frac{-\pi}{2}\right)$, den Voraussetzungen über $l(\varphi)$ nach, absolut kleiner als π sind. Denn dann muß die Differenz von zwei etwaigen derartigen Funktionen $F(x)$ identisch Null sein, wie sich aus dem folgenden Satze ergibt:

(f) *Es sei $\varphi(x)$ für $R(x) \geqq 0$ regulär und dort*

$$|\varphi(x)| < e^{r^{\text{const}}} \cdot \text{const} \tag{44}$$

Wenn

$$|\varphi(\pm ir)| < e^{kr}\,\text{const}, \qquad k < \pi, \tag{45}$$

so kann $\varphi(x)$ nicht für alle $x = 1, 2, 3, \ldots$ verschwinden, es sei denn, daß $\varphi(x)$ identisch Null ist.

Wir können die Ungleichung

$$|\varphi(x)| < e^{kr|\sin\varphi|}$$

in der ganzen Halbebene $R(x) \geqq 0$ erfüllt annehmen. Denn wenn dies nicht für $\varphi(x)$ der Fall ist, so gilt sie doch für die Funktion

$$\varphi(x)\frac{e^{-Ax}}{B},$$

wenn die Konstanten A, B geeignet gewählt werden. Deshalb kann die fragliche Ungleichung schon für $\varphi(x)$ angenommen werden. Man nehme nun an, es sei $\varphi(x) = 0$ für $x = 1, 2, 3, \ldots$ und bilde die Funktion

$$\Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{\sin \pi x} e^{\omega(x-\frac{1}{2})},$$

wo ω eine positive reelle Größe ist. Man kann eine von ω unabhängige Konstante C finden derart, daß

$$|\Phi(x)| \leqq C \quad \text{für} \quad |x| = \tfrac{1}{2}, \qquad R(x) \geqq 0,$$

und daß

$$\left|\frac{1}{\sin \pi x}\right| \leqq C e^{-\pi r|\sin\varphi|}$$

für $|\varphi| \geqq \pi/4$, $x \geqq \frac{1}{2}$. Auf den Halbstrahlen (außerhalb $|x| = \frac{1}{2}$) $\arg x = \pm\varphi$ und auf dem zwischenliegenden Bogen von $x = \frac{1}{2}$ ist daher

$$|\Phi(x)| \leqq C,$$

wenn φ kleiner als, aber so nahe an $\pi:2$ gewählt wird, daß

$$\operatorname{tg}\varphi \geqq \frac{\omega}{\pi - k}.$$

Auf der positiven reellen Achse und für $x \geqq \frac{3}{2}$ ist daher

$$|\varphi(x)| \leqq C e^{-\omega},$$

eine Ungleichung, die für festes C und beliebiges ω erfüllt ist. Daraus folgert man, daß $\varphi(x)$ identisch verschwindet.

Der letzte Teil von Satz **(e)** beantwortet die Frage, wie aus dem Anwachsen von $F(x)$ entschieden werden kann, ob ein gegebener Punkt von L eine reguläre oder singuläre Stelle von $H(z)$ ist. Um ihn zu beweisen, nehmen wir an, es sei $P = z_{\varphi}$ ein regulärer Punkt für $H(z)$. Dann läßt sich einen kleinen Bogen QR von L abgrenzen, der P enthält, und dessen Endpunkte Q, R mit einem Bogen b verbunden werden können derart, daß b innerhalb L verläuft und daß $H(z)$ innerhalb und auf der Begrenzung des Flächenstückes $QPRb$ regulär ist. Man lasse nun b ein Stück von L^* in (43) bilden. Wir wissen nach **(b)** und (32), daß

$$|z^{-e^{i\varphi}}| < |z_{\varphi}^{-e^{i\varphi}}|,$$

wenn z dem restierenden Bogen RQ von L angehört, und nach **(c)** ist dieselbe Ungleichung erfüllt, wenn z dem Bogen b angehört. Für den fraglichen φ-Wert muß daher bei der Abschätzung von (43)

$$\limsup \sqrt[r]{|F(re^{i\varphi})|} < e^{l(\varphi)}$$

herauskommen.

Damit ist der Satz **(e)** vollständig bewiesen.

Wir fügen die folgende Bemerkung hinzu. *Wenn die ganze Funktion $F(x)$ ungerade ist, so genügt $H(z)$ der Funktionalgleichung*

$$H(z) = H\left(\frac{1}{z}\right). \tag{46}$$

Dies folgt sofort aus den Entwicklungen (39), (42). *Umgekehrt, wenn* (46) *erfüllt ist* für die in **(e)** betrachtete Funktion $H(z)$, *so muß $F(x)$ ungerade sein.* Denn führt man in (43) $\frac{1}{z}$ statt z ein, so kommt auf Grund von (46) $F(x) = -F(-x)$. Übrigens folgt aus den Entwicklungen (39), (42), daß $F(x) + F(-x)$ für $x = 1, 2, 3, \ldots$ verschwindet; nach **(f)** verschwindet diese Funktion für alle x. In genau derselben Weise findet man, *daß $H(z)$ der Funktionalgleichung*

$$H(z) = -H\left(\frac{1}{z}\right) \tag{47}$$

genügt, wenn $F(x)$ gerade und $F(0) = 0$ ist, und umgekehrt.

Von den Eigenschaften der Kurven L und der Funktionen l sei noch die folgende erwähnt.

Es seien L und $\bar{L}$ zwei L-Kurven, l und $\bar{l}$ die zugehörigen l-Funktionen. Wenn $\bar{L}$ ganz innerhalb L liegt, so ist für alle φ

$$\bar{l}(\varphi) < l(\varphi). \tag{48}$$

Dies folgt sofort aus den Eigenschaften der Winkel μ oder auch aus der Darstellung (43) oder aus Satz **(c)**.

§ 3.

8. Wir betrachten die Abbildung

$$t = \frac{z}{(1-z)^2}. \tag{49}$$

Zu dieser wird man geführt, wenn man die Verteilung in der z-Ebene der Wurzeln einer Gleichung (1) studiert oder — was dasselbe ist — wenn man das Anwachsen einer Funktion studiert, die in der Weise (17) von diesen Wurzeln abhängen. Man füge nämlich die Wurzeln $\frac{1}{z}$ hinzu, so daß (1) durch

$$e(z)\,e\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

ersetzt wird. Diese ist reziprok und geht durch (49) in die Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten

$$b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \ldots + 1 = 0$$

über. Von dieser kann aber behauptet werden, daß sie Wurzeln innerhalb des Einheitskreises hat, es sei denn, daß sämtliche Wurzeln einer Gleichung

$$t^m = 1$$

angehören. Um dies Ergebnis für die Gl. (1) zu deuten, hat man die durch (49) bewirkte Abbildung von dem Einheitskreise zu bestimmen.

Der Kreis $t = 1$ geht durch (49) in eine Kurve L über, deren reelle Punkte durch

$$\varrho + \frac{1}{\varrho} = 1 + 2\cos\psi$$

bestimmt sind. Sie liegt also im Winkelfelde $\cos\psi \geqq \frac{1}{2}$, d. h.

$$\frac{-\pi}{3} \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{3}.$$

Aus

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\psi} = \frac{2\sin\psi}{\frac{1}{\varrho} - \varrho} \tag{50}$$

folgt sofort, daß L eine L-Kurve ist. Zu ihr gehört eine l-Funktion, die mit $\lambda(\varphi)$ bezeichnet wird[2]). Weil L in sich selbst übergeht bei einer Spiegelung am Einheitskreise oder an der reellen Achse, so ist

$$\lambda(\varphi) = \lambda(-\varphi) = \lambda(\pm\pi + \varphi).$$

Man hat nun die Abbildung (28) von L auf den Halbstrahlen der x-Ebene zu untersuchen. Es ist leicht eine konforme Abbildung anzugeben, die L in einfache geschlossene Kurve C in der x-Ebene überführt, die den Nullpunkt im Innern enthält und so beschaffen ist, daß derjenige Punkt z von L, wo $\cot\mu = \operatorname{tg}\varphi$ ist, dem Punkte x von C entspricht, für welchen $\arg x = \varphi$. Denn die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\psi} = \operatorname{tg}\varphi$$

stellt nach (50) einen Kreis durch $z = \pm 1$ dar, der L in dem Punkte schneidet, wo $\cot\mu = \operatorname{tg}\varphi$ ist, und der die reelle Achse unter dem Winkel φ schneidet[3]). Durch

$$z = \frac{x-1}{x+1}$$

geht L in eine Kurve C über und der soeben betrachtete Kreis in die Gerade über, die den Nullpunkt mit dem dem Punkte z entsprechende Punkt x verbindet. Weil gleichzeitig die reelle Achse der z-Ebene in die reelle Achse der x-Ebene übergeht, so ist, wie behauptet, $\arg x = \varphi$[4]). Es ist aber die Kurve C das Oval

$$\left|z + \frac{1}{z} - 2\right| = \frac{4}{|x^2-1|} = 1$$

und folglich

$$\left|z_\varphi - e^{i\varphi}\right| = \left|\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - e^{i\varphi}\right|,$$

d. h. $\lambda(\varphi)$ stimmt mit der in Nr. 2 definierten Funktion überein.

Die Kurve L teilt die z-Ebene in zwei Teilen; derjenige, der $z = 0, \infty$ enthält, wird mit Z bezeichnet. Auf der t-Ebene konstruieren wir eine zweiblättrige Riemannsche Fläche, indem wir die zwei Ebenen längs der

---

[2]) Weil der Punkt $e^{\frac{\pi i}{3}}$ auf L liegt, so folgt nach (b) die Ungleichung (19).

[3]) Denn es ist, auf dem Kreise, $\lim_{\psi=\pi} \frac{2\sin\psi}{\frac{1}{\varrho} - \varrho} = \varrho\frac{d\psi}{d\varrho}$.

[4]) Weil gleichzeitig die Gerade Oz in den Kreis durch die Brennpunkte übergeht, so erhält man den Satz: Ein Kreis durch die Brennpunkte eines Cassinischen Ovales schneidet das Oval unter einem Winkel $\frac{\pi}{2} - \varphi$, wenn φ der Winkel ist, den der Radiusvektor nach dem Schnittpunkte mit den Verbindungsgeraden der Brennpunkte bildet.

negativen reellen Achse von $-\frac{1}{4}$ bis $-\infty$ aufschlitzen und die gegenüberliegenden Ränder verschiedener Blätter vereinigen. Aus dieser Fläche schneide man das Gebiet T: $|t|<1$ aus.

Durch (49) *wird dann Z konform auf T abgebildet.*

Von der Gleichung (1) *kann behauptet werden, daß sie Wurzeln außerhalb L hat, es sei denn, daß sämtliche Wurzeln einer Gl.* (16) *angehören.* Betrachtet man eine ganze Funktion von der Form

$$F(x)=p(x)+\sum_z p_z(x)z^{-x},$$

wo über eine endliche Anzahl von Punkten z summiert wird, so kann für die durch (9) definierte Funktion $f(\varphi)$ die Ungleichung

$$f(\varphi)\leqq l(\varphi)$$

nach (c) nur dann erfüllt sein, wenn die Punkte z innerhalb oder auf der zu l gehörigen L-Kurve liegen. Wenn also speziell die z Wurzeln einer Gl. (1) sind, so kann

$$f(\varphi)\leqq\lambda(\varphi)$$

nur dann gelten, wenn die z auf L liegen und also einer Gl. (16) angehören. Diese Eigenschaft, die aus der Form der Funktionen (17) herfließt, läßt sich auf die im Satze der Nr. 2 angegebene Weise zu den ganzwertigen Funktionen erstrecken. Dabei tritt also an Stelle der Voraussetzung, daß die Funktion von der Form (17) ist, die Voraussetzung über die Ganzwertigkeit.

9. Es sei $V(x)$ ganzwertig; man kann $V(0)=0$ annehmen. Aus $V(x)$ wird die ganzwertige gerade bzw. ungerade Funktion

$$G(x)=V(x)+V(-x);\qquad U(x)=V(x)-V(-x)$$

gebildet. Zu $V(x)$ gehört die durch (14) definierte Funktion $v(\varphi)$; ähnlich werden die zu $U(x)$, $G(x)$ gehörigen Funktionen $u(\varphi)$, $g(\varphi)$ eingeführt. Es ist $u(\varphi)=u(\varphi\pm\pi)$, $g(\varphi)=g(\varphi\pm\pi)$.

Wir nehmen an, daß

$$v(\varphi)\leqq\lambda(\varphi)$$

für alle φ. Dann gelten auch

$$u(\varphi)\leqq\lambda(\varphi);\qquad v(\varphi)\leqq\lambda(\varphi).$$

Wenn, für ein bestimmtes φ, $v(\varphi)=\lambda(\varphi)$, so muß mindestens eine der Gleichheiten $u(\varphi)=\lambda(\varphi)$, $g(\varphi)=\lambda(\varphi)$ für dasselbe φ erfüllt sein. Umgekehrt, wenn eine oder beide dieser Gleichheiten für ein bestimmtes φ erfüllt sind, so muß $v(\varphi)=\lambda(\varphi)$ sein entweder für dasselbe φ oder für $\varphi\pm\pi$.

Dies vorausgeschickt, betrachte man eine Funktion $H(z)$, die außerhalb L und im Unendlichen regulär ist. Durch (49) geht sie in eine Funktion $h(t)$ über, die in T eine reguläre Funktion des Punktes t ist. Nun werden zwei übereinanderliegende Punkte in T in z und $1/z$ abgebildet. Wenn also $H(z)$ der Funktionalgleichung

$$H(z) = H\left(\frac{1}{z}\right)$$

genügt, so ist $h(t)$ im schlichten Bereiche $|t| < 1$ regulär.

Dann kann man schreiben

$$H(z) = \sum_1^\infty U(n) z^n, \qquad h(t) = \sum_1^\infty u_n t^n.$$

Eine kleine Rechnung liefert

$$U(n) = \sum_1^n u_\nu \binom{n+\nu-1}{2\nu-1}.$$

Weil

$$\limsup \sqrt[\nu]{|u_\nu|} \leqq 1,$$

so muß also

$$U(x) = \sum_{\nu=1}^\infty u_\nu \binom{x+\nu-1}{2\nu-1}.$$

Wenn $U(x)$ ganzwertig ist, so sind alle u_ν ganze Zahlen.

Für die gerade Funktion $G(x)$ schreibe man

$$\bar{H}(z) = \frac{1-z}{1+z} \sum_1^\infty G(n) z^n,$$

so daß

$$\bar{H}(z) = \bar{H}\left(\frac{1}{z}\right)$$

erfüllt wird und findet

$$\bar{h}(t) = \sum_1^\infty g_\nu t^\nu, \quad \limsup \sqrt[\nu]{|g_\nu|} \leqq 1,$$

$$G(x) = \sum_{\nu=1}^\infty \frac{g_\nu}{\nu} \binom{x+\nu-1}{2\nu-1}.$$

Wenn, für alle φ, $v(\varphi) < \lambda(\varphi)$ ist, so sind $H(z)$ und $\bar{H}(z)$ auf L regulär, also sind $h(t)$ und $\bar{h}(t)$ auf $|t| = 1$ regulär. Also müssen u_ν, g_ν von einem gewissen ν ab sämtlich Null sein. Damit ist der erste Fall des Satzes bewiesen.

Wenn $v(\varphi) = \lambda(\varphi)$ nur für endlich viele φ, so haben $h(t)$ und $\bar{h}(t)$ nur endlich viele Singularitäten auf $|t| = 1$. Sie müssen also rationale Funktionen von der Form

$$\frac{P(t)}{(1-t^p)^q}$$

sein. Dann sind auch $H(z)$ und $\bar{H}(z)$ rationale Funktionen, und zwar können ihre Unendlichkeitsstellen keine andere als $z = 1$ $(t = \infty)$ und die Wurzeln von

$$\left(z + \frac{1}{z} - 2\right)^p = 1$$

sein. Diejenigen Argumente φ, für welche $v(\varphi) = \lambda(\varphi)$, sind also mod π mit den Argumenten der Wurzeln x von (15) kongruent. Bei der Entwicklung der rationalen Funktionen H und $\bar{H}$ erhält man die Koeffizienten in der Form

$$p(n) + \sum_z p_z(n) z^{-n}.$$

Weil Satz **(f)** hier anwendbar ist, kommt also für $V(x)$ die Darstellung (17

Wenn endlich $v(\varphi) = \lambda(\varphi)$ für unendlich viele φ, so gilt dasselbe wenigstens für eine der Gleichheiten $u(\varphi) = \lambda(\varphi)$, $g(\varphi) = \lambda(\varphi)$. Also muß der Einheitskreis $|t| = 1$ singuläre Linie sein wenigstens für eine der Funktionen $h(t)$, $\bar{h}(t)$. Dann muß aber für jedes φ wenigstens eine der Gleichheiten $u(\varphi) = \lambda(\varphi)$, $g(\varphi) = \lambda(\varphi)$ erfüllt sein und also für jedes φ entweder $v(\varphi) = \lambda(\varphi)$ oder $v(\varphi \pm \pi) = \lambda(\varphi)$.

Damit ist der Satz bewiesen.

§ 4.

10. Es sei $W(x)$ eine Funktion, die für

$$x = x_0, x_0 + 1, x_0 + 2, \ldots$$

ganze rationale Werte annimmt. Es zeigt sich zunächst, daß man hier nicht mit ganzen Funktionen zu tun hat, sondern mit Funktionen, die in einer Halbebene $R(x - \bar{x}_0) \geqq 0$ regulär sind. Dann kann man annehmen, daß $W(x)$ regulär ist für $R(x) \geqq 0$, und daß $W(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ganze rationale Zahlen sind.

Nun lassen sich den obigen ganz ähnliche Betrachtungen anstellen. Man bilde die Reihe

$$H(z) = \sum_0^\infty W(n) z^n,$$

die durch

(51) $$z = \frac{t}{1+t}$$

n eine Reihe $\sum c_\nu t^\nu$ mit ganzzahligen Koeffizienten übergeführt wird. (51) ermittelt die Abbildung des Einheitskreises $|t|<1$ auf die Halbebene $\Re(z)<\frac{1}{2}$.

Man hat nun den Satz anzuwenden, der (e) entspricht, und der die Bedingungen gibt dafür, daß eine Reihe (39) regulär ist innerhalb eines Bereiches, der endlich oder unendlich sein kann, der aber den Nullpunkt enthält, und der von einer Kurve begrenzt ist, von der, ähnlich wie in (e), gewisse Voraussetzungen gemacht werden. Diese Bedingungen werden durch die in $\frac{-\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ aus

$$\limsup_{r=\infty} \sqrt[r]{|F(re^{i\varphi})|} = e^{m(\varphi)}$$

definierte Funktion $m(\varphi)$ ausgedrückt, wenn $F(x)$ eine für $R(x) \geqq 0$ reguläre Funktion ist, die für $x = n$ den Koeffizienten von z^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, liefert.

In dem hier betrachteten Falle ist die Begrenzungskurve $R(x) = \frac{1}{2}$ und man findet sofort

$$|z_\varphi^{-e^{i\varphi}}| = e^{\mu(\varphi)},$$

$$\mu(\varphi) = \cos\varphi \log 2\cos\varphi + \varphi \sin\varphi.$$

Also:

Es sei $W(x)$ regulär für $R(x) \geqq 0$ und dort

$$\limsup \sqrt[r]{|W(re^{i\varphi})|} = e^{w(\varphi)}.$$

Für diejenigen Funktionen $W(x)$, die für positive rationale ganze x ganze Werte annehmen, und die noch der Bedingung

$$w(\varphi) \leqq \mu(\varphi)$$

für alle φ in $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ genügen, sind drei Fälle möglich.

1. *Wenn $w(\varphi) < \mu(\varphi)$ für alle φ, so ist $W(x)$ ein Polynom.*
2. *Wenn $w(\varphi) = \mu(\varphi)$ nur für endlich viele φ, so kann man eine ganze Zahl p bestimmen derart, daß diese φ-Werte in*

(52) $$0, \pm\frac{\pi}{p}, \quad \pm 2\cdot\frac{\pi}{p}, \ldots$$

enthalten sind. Mit diesem p bilde man die Gleichung

(53) $$\left(\frac{z}{1-z}\right)^p = 1.$$

Dann muß

(54) $$W(x) = p(x) + \sum_z p_z(x) z^{-x},$$

wo $p(x)$, $p_z(x)$ Polynome und z die Wurzeln von (53) sind.

3. *Wenn endlich* $w(\varphi) = \mu(\varphi)$ *für unendlich viele* φ, *so muß* $w(\varphi) = \mu(\varphi)$ *für alle* φ. *Es gibt Funktionen* $W(x)$ *mit dieser Eigenschaft.*

Die Punkte von $R(z) = \frac{1}{2}$ können

$$z = \frac{1}{2\cos\theta} e^{i\theta}$$

geschrieben werden. Der entsprechende Punkt des Einheitskreises ist

$$t = e^{2i\theta}.$$

Die Abbildung (28) geht in

$$\varphi = \theta$$

über.

Betrachten wir diejenigen Funktionen $W(x)$, für welche

$$|W(x)| < e^{\frac{\pi}{3} \cdot r |\sin\varphi|} \cdot e^{r\varepsilon(r)}, \tag{55}$$

so ist $\frac{\pi}{3}|\sin\varphi| < \mu(\varphi)$ für $\varphi \neq \frac{\pi}{3}$. Es muß also in (52) $p = 3$ sein, so daß die Gl. (53)

$$\left(\frac{z}{1-z}\right)^3 = 1$$

wird. Nach (55) muß der Koeffizient von 2^z Null sein. Also: *Diejenigen Funktionen, die für* $R(x) \geqq 0$ *regulär sind und* (55) *erfüllen, müssen, wenn sie für* $x = 0, 1, 2, \ldots$ *ganze rationale Werte annehmen, in*

$$p(x)\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi x}{3} + q(x)\cos\frac{\pi x}{3} + r(x)$$

enthalten sein.

Es sei noch

$$|W(x)| < 2^r e^{r\varepsilon(r)}. \tag{56}$$

Dann ist $p = 1$. *Diejenigen Funktionen* $W(x)$, *die* (56) *erfüllen, müssen also von der Form*

$$p(x)2^x + q(x)$$

sein.

Ein Beispiel zum Falle 3 wird durch die Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{x+1}{n^2}$$

geliefert.

(Eingegangen am 9. März 1920.)

Zusatz bei der Korrektur.

Ich möchte hier die folgenden Arbeiten erwähnen, die mir bei der Ausarbeitung meines Aufsatzes unbekannt waren:

Hardy, On a theorem of Mr. G. Pólya, Proc. Cambridge Phil. Soc., XIX (1920), S. 60—63;

Landau, On Mr. Hardys extension of a theorem of Mr. G. Pólya, ibid. XX (1920), S. 14—15.

Pólya, Über ganze ganzwertige Funktionen, Göttinger Nachrichten, 1920, S. 1—10.

(Den 20. 11. 1920.)

Über Hermitesche Formen mit rekurrierender Determinante und über rationale Polynome.

Von

Otto Szász in Frankfurt a. M.

Das Quadrat des absoluten Betrages einer ganzen rationalen Funktion n-ten Grades:

$$|\gamma_0 + \gamma_1 z + \ldots + \gamma_n z^n|^2, \qquad z = e^{\varphi i},$$

wobei z auf dem Einheitskreise variiert, ist offenbar ein nichtnegatives *trigonometrisches* Polynom n-ter Ordnung, und bei beliebiger Veränderlichkeit von $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ erhält man *sämtliche* nichtnegativen trigonometrischen Polynome n-ter Ordnung. Aus diesem von Herrn L. Fejér herrührenden Satz habe ich eine Beziehung zwischen gewissen Bilinearformen und den nichtnegativen trigonometrischen Polynomen hergeleitet, die zu gewissen Sätzen über trigonometrische Polynome, harmonische Funktionen und Potenzreihen führte [1]).

Ein Gegenstück hierzu bietet die nachfolgende Untersuchung. Ich betrachte wiederum das Quadrat des absoluten Betrages einer ganzen rationalen Funktion n-ten Grades mit beliebigen Koeffizienten

$$|u_0 + u_1 x + \ldots + u_n x^n|^2,$$

jetzt aber für alle *reellen* Werte der Variablen x; dann erhalte ich offenbar ein nichtnegatives *rationales* Polynom $2n$-ten Grades. Es ist auch leicht zu zeigen, daß man bei beliebiger Veränderlichkeit von $u_0, u_1, \ldots, u_n$ *sämtliche* nichtnegativen rationalen Polynome $2n$-ten Grades erhält. Aus diesem Satz leite ich eine Beziehung zwischen den Bilinearformen mit

[1]) Vgl. Szász, a) Über harmonische Funktionen und L-Formen, Math. Zeitschr. 1 (1918), S. 149–162. – b) Über Potenzreihen und Bilinearformen, ebenda 4 (1919), S. 163–176. Daselbst ist auch der Beweis des Fejérschen Satzes wiedergegeben und es sind historische Bemerkungen daran geknüpft.

rekurrierender Determinante und den nichtnegativen rationalen Polynomen ab, die zu gewissen zum Teil neuen Sätzen über diese Polynome führt. In der Hauptsache handelt es sich darum, die Extremwerte gewisser zu den Polynomen gehöriger Ausdrücke bei geeigneter Normierung zu bestimmen; dabei wird Wert darauf gelegt, auch die zugehörigen Polynome anzugeben. Aus der Literatur sind in dieser Richtung hauptsächlich zwei Arbeiten von A. Hurwitz[2]) bzw. G. Pólya[3]) anzuführen. Um einige spezielle Resultate meiner Arbeit anzugeben, erwähne ich die Sätze:

Das Polynom $f(x)=\sum_{\nu=0}^{2n} t_\nu x^\nu$ sei nichtnegativ; α sei eine positive, x_1 eine reelle Zahl; dann ist

$$f(x_1)+\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu-1)}{\nu!}f^{(\nu)}(x_1)\geqq f(x_1)\frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)},$$

$$f(x_1)+\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu-1)}{\nu!}f^{(\nu)}(x_1)\geqq n!\,t_{2n}\,\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\ ^4).$$

Ferner ist

$$\alpha\sum_{\nu=0}^{2n}\frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!\,(\nu+\alpha)}\geqq\begin{cases} f(x_1)\left[\dfrac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}\right]^2, \\ \dfrac{t_{2n}}{2n+\alpha}\left[\dfrac{n!}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)\dots(2n+\alpha-1)}\right]^2. \end{cases}$$

Gleichheit gilt in der ersten Ungleichung nur für

$$f(x)=c\,[B_{2n+1}(x_1-x)]^2$$

und in der zweiten Ungleichung für

$$f(x)=c\,[B_{2n}(x_1-x)]^2,$$

wobei c eine positive Konstante und $B_\nu(z)$ den Näherungsnenner ν-ter Ordnung des Kettenbruches

$$\frac{1|}{|z}+\frac{\alpha|}{|1}+\frac{1|}{|z}+\frac{\alpha+1|}{|1}+\frac{2|}{|z}+\frac{\alpha+2|}{|1}+\dots$$

bedeutet. Entsprechend lassen sich die Fälle der Gleichheit in den beiden letzten Ungleichungen angeben[5]).

---

[2]) A. Hurwitz, Über definite Polynome, Math. Ann. **73** (1913), S. 173–176.

[3]) G. Pólya, Positiv quadratikus alakokról, a melyeknek mátrixa Hankelféle, Mathematikai és Természettudományi Értesitő **32** (1914), S. 656–679.

[4]) Für $\alpha=1$ wurden diese Ungleichungen wohl zuerst von Herrn Szegő bewiesen. Vgl. die Fußnote [26]).

[5]) Vgl. die Sätze XI und XIII; $f(x)$ soll nicht identisch verschwinden.

§ 1.

Über eine besondere Klasse von Hermiteschen Formen.

Ich beginne mit dem

Satz I. *Gegeben seien* $2n+1$ *reelle Zahlen*:

$$a_0, a_1, \ldots, a_{2n};$$

jedem Polynom höchstens $2n$*-ten Grades mit reellen Koeffizienten* $f(x)=\sum_{\nu=0}^{2n} t_\nu x^\nu$, *das niemals negativ wird, also der Bedingung*

$$(1) \qquad f(x) \equiv t_0 + t_1 x + \ldots + t_{2n} x^{2n} \geqq 0 \quad \textit{für alle } x$$

genügt, sei die Zahl

$$(2) \qquad A_f = \sum_{\nu=0}^{2n} \frac{a_\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(0) = \sum_{\nu=0}^{2n} a_\nu t_\nu$$

zugeordnet. Die Gesamtheit M_f *dieser Zahlen* A_f *stimmt mit dem Wertevorrat der Hermiteschen Form* $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu} u_\nu \bar{u}_\mu$ *überein*[6]).

Es sei ferner $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} b_{\nu+\mu} u_\nu \bar{u}_\mu$ *eine nichtnegative Hermitesche Form (mit rekurrierender Determinante), und es seien nur solche Wertesysteme* (u_ν) *zugelassen, für die* $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} b_{\nu+\mu} u_\nu \bar{u}_\mu = 1$ *ist, dann hat man zur Erhaltung unseres Satzes bei der Bildung der Menge* M_f *nur die Polynome* $f(x)$ *heranzuziehen, die nebst* (1) *der Bedingung*

$$(3) \qquad b_0 t_0 + b_1 t_1 + \ldots + b_{2n} t_{2n} = 1$$

genügen.

Beschränkt man sich insbesondere auf Wertesysteme (u_ν), *für die* $|u_0| = 1$, *bzw.* $|u_n| = 1$ *ist, so kommen nur die* $f(x)$ *mit* $t_0 = 1$ *bzw.* $t_{2n} = 1$ *in Betracht.*

Der Beweis ergibt sich fast unmittelbar aus folgendem

Hilfssatz[7]). Es sei

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{2n} t_\nu x^\nu$$

---

[6]) Im folgenden bedeutet $\bar{u}$ die zu u konjugierte komplexe Zahl.

[7]) Vgl. E. Landau, Über die Darstellung definiter Funktionen durch Quadrate, Math. Ann. **62** (1906), S. 272–285; insbes. S. 272.

ein nichtnegatives Polynom $2n$-ten Grades mit reellen Koeffizienten, also

$$f(x) \geqq 0 \quad \text{für jedes reelle } x,$$

dann ist $f(x)$ in der Gestalt darstellbar

$$(4) \qquad f(x) = (u_0 + \ldots + u_n x^n)\,(\bar{u}_0 + \ldots + \bar{u}_n x^n).$$

Hieraus ergibt sich nun der Beweis des Satzes I folgendermaßen:

Aus (4) folgt

$$(5) \qquad \begin{cases} t_0 = u_0\bar{u}_0,\ t_1 = u_0\bar{u}_1 + u_1\bar{u}_0,\ \ldots,\ t_n = u_0\bar{u}_n + u_1\bar{u}_{n-1} + \ldots + u_n\bar{u}_0, \\ t_{n+1} = u_1\bar{u}_n + u_2\bar{u}_{n-1} + \ldots + u_n\bar{u}_1,\ \ldots,\ t_{2n} = u_n\bar{u}_n; \end{cases}$$

dies ist also eine Parameterdarstellung der Koeffizienten der nichtnegativen Polynome $2n$-ten Grades. Hieraus ergibt sich

$$A_f = a_0u_0\bar{u}_0 + a_1(u_0\bar{u}_1 + u_1\bar{u}_0) + \ldots + a_n(u_0\bar{u}_n + u_1\bar{u}_{n-1} + \ldots + u_n\bar{u}_0) + a_{n+1}(u_1\bar{u}_n + u_2\bar{u}_{n-1} + \ldots + u_n\bar{u}_1) + \ldots + a_{2n}u_n\bar{u}_n,$$

also

$$A_f = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu}\,u_\nu\bar{u}_\mu.$$

Daraus folgt, daß die Menge M_f identisch ist mit dem Wertevorrat der Hermiteschen Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu}\,u_\nu\bar{u}_\mu$. Es ist auch klar, daß die Beschränkung auf solche Werte u_ν, für die $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} b_{\nu+\mu}\,u_\nu\bar{u}_\mu = 1$ ist, gleichbedeutend ist mit der Beschränkung auf die $f(x)$, für die (3) gilt, denn aus (4) bzw. (5) folgt

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{n} b_{\nu+\mu}\,u_\nu\bar{u}_\mu = \sum_{\nu=0}^{2n} b_\nu t_\nu.$$

Insbesondere für $b_0 = 1, b_1 = 0, \ldots, b_{2n} = 0$ erhält man die Bedingung $|u_0|^2 = t_0 = 1$, und für $b_0 = 0, \ldots, b_{2n-1} = 0,\ b_{2n} = 1$ erhält man die Bedingung $|u_n|^2 = t_{2n} = 1$.

Damit ist der Satz I vollständig bewiesen.

Es sei nun h irgendeine reelle Zahl; mit $f(x)$ zugleich ist offenbar auch $f(hx)$ und $f(h+x)$ ein nichtnegatives Polynom $2n$-ten Grades. Also gehört zugleich mit $\sum_{\nu=0}^{2n} a_\nu t_\nu$ der ganze Wertevorrat des Polynoms $\sum_{\nu=0}^{2n} a_\nu t_\nu x^\nu$ bzw. des Polynoms $\sum_{\nu=0}^{2n} \frac{a_\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x)$ zur Zahlenmenge M_f; hieraus folgt insbesondere der

Satz II. *Damit aus jedem nichtnegativen Polynom* $f(x)=\sum_{\nu=0}^{2n} t_\nu x^\nu$, *das nicht identisch verschwindet, durch Komposition mit der Zahlenfolge* $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ *ein nichtnegatives (positives) Polynom* $\sum_{\nu=0}^{2n} a_\nu t_\nu x^\nu$ *entsteht, oder (was damit gleichbedeutend ist) damit für jedes nichtnegative* $f(x)$ *das Polynom* $\sum_{\nu=0}^{2n} \frac{a_\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x)$ *nichtnegativ (positiv) sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Hermitesche Form* $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu} u_\nu \bar{u}_\mu$ *nichtnegativ (positiv definit) sei*[8]).

Eine Anwendung. Die Hermitesche Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} g_{\nu+\mu} u_\nu \bar{u}_\mu$ sei nichtnegativ und es sei $g_0=1$; ferner sei $1+t_1 x+\ldots+t_{2n}x^{2n}$ (also $t_0=1$) ein nichtnegatives Polynom $2n$-ten Grades. Dann ist nach Satz II auch das Polynom $1+g_1t_1x+\ldots+g_{2n}t_{2n}x^{2n}$ (mit dem konstanten Gliede 1) nichtnegativ; also kommt die Zahlmenge

$$a_0+a_1g_1t_1+\ldots+a_{2n}g_{2n}t_{2n} \tag{6}$$

in der Menge M_f ($t_0=1$) vor, d. h. sie ist im Wertevorrat der Hermiteschen Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu} u_\nu \bar{u}_\mu$ ($|u_0|=1$) enthalten. Andererseits stimmt nach Satz I die Menge (6) mit dem Wertevorrat der Hermiteschen Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu} g_{\nu+\mu} u_\nu \bar{u}_\mu$ ($|u_0|=1$) überein. Wir erhalten somit den

Satz III. *Ist die Hermitesche Form* $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} g_{\nu+\mu} u_\nu \bar{u}_\mu$ ($g_0=1$) *nichtnegativ, so ist der Wertevorrat der Hermiteschen Form* $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu} g_{\nu+\mu} u_\nu \bar{u}_\mu$ *im Wertevorrat der Form* $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu} u_\nu \bar{u}_\mu$ *enthalten; hier ist stets* $|u_0|=1$[9])

---

[8]) Man vgl. Hurwitz, a. a. O. [2]); Pólya, a. a. O. [3]), insb. S. 660. — M. Fujiwara: Über definite Polynome, The Tohoku Mathematical Journal **6** (1914), S. 20—26. — Für solche (a_ν)-Folgen vgl. auch M. Petrovitch, Équations algébriques et transcendantes dépourvues de racines réelles, Bulletin de la Société Mathém. de France **41** (1913), S. 194—206. — L. Orlando, Sopra alcuni polinomii definiti, considerati da Hurwitz, Atti della r. accad. dei Lincei. Roma. Serie V. Rendiconti. Classe di scienze fisiche, mat. e. nat. XXII. 1° Sem. 1913, S. 213—215.

[9]) Für einen allgemeineren Satz von I. Schur vgl. z. B. meine unter 1a) zitierte Arbeit; insbes. S. 153—154.

Hieraus folgt insbesondere der

Satz III′. *Ist die Hermitesche Form* $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} g_{\nu+\mu} u_\nu \bar{u}_\mu$ *nichtnegativ und die Hermitesche Form* $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu} u_\nu \bar{u}_\mu$ *positiv definit, so ist auch* $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu} g_{\nu+\mu} u_\nu \bar{u}_\mu$ *positiv definit.*

§ 2.

Über nichtnegative Polynome.

Die Hermitesche Form

$$H(u) = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu} u_\nu \bar{u}_\mu$$

sei nun positiv definit; dann besitzt sie ein Minimum m_n unter der Bedingung $|u_0| = 1$. Da $H(u)$ seinen Wert nicht ändert, wenn jedes u_ν mit einem bestimmten Faktor vom absoluten Beträge Eins multipliziert wird, so wird das Minimum m_n auch bei der Bedingung $u_0 = 1$ erreicht. Dieses Minimum ist mit der bekannten Methode der Differentialrechnung leicht zu berechnen; für m_n und die u_ν ergibt sich das Gleichungsystem [10])

$$(7) \qquad \begin{cases} a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n = m_n, \\ a_1 u_0 + a_2 u_1 + \ldots + a_{n+1} u_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n u_0 + a_{n+1} u_1 + \ldots + a_{2n} u_n = 0; \end{cases}$$

hieraus folgt

$$(7') \qquad m_n = \frac{[a_{\nu+\mu}]_0^n}{[a_{\nu+\mu}]_1^n} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_3 & \ldots & a_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{2n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \ldots & a_{n+1} \\ a_3 & a_4 & \ldots & a_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \ldots & a_{2n} \end{vmatrix},$$

und die u_ν sind eindeutig bestimmt; sie sind reell, wir können uns also von vornherein auf reelle u_ν beschränken und aus Satz I folgt der

Satz IV. *Ist das Polynom* $f(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{2n} t_\nu x^\nu$ *nichtnegativ und die quadratische Form* $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu} u_\nu u_\mu$ *positiv definit, so ist*

---

[10]) Man vgl. etwa O. Szász, Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen, Math. Ann. 77 (1916), S. 482—496, insbes. S. 486—487.

$$(8)\qquad \sum_{\nu=0}^{2n} a_\nu \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} = a_0 + \sum_{\nu=1}^{2n} a_\nu t_\nu \geqq \frac{[a_{\nu+\mu}]_0^n}{[a_{\nu+\mu}]_1^n} = m_n,$$

und Gleichheit gilt hier nur für $f^*(x) = \left(\sum_{\nu=0}^{n} u_\nu x^\nu\right)^2$, *wobei die* u_ν *durc*
das Gleichungssystem (7) *bestimmt sind* [11]).

Ich werde später zur Bestimmung von m_n und $f^*(x)$ einen ander
Weg einschlagen (vgl. § 4).

Es sei nun x_0 eine reelle von Null verschiedene Zahl; mit $f(x)$ zu
gleich ist auch das Polynom

$$\varphi(x) = f(x_0 x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{2n} t_\nu x_0^\nu x^\nu$$

nichtnegativ. Daher ist nach Satz IV

$$\sum_{\nu=0}^{2n} a_\nu \frac{\varphi^{(\nu)}(0)}{\nu!} = a_0 + \sum_{\nu=1}^{2n} a_\nu t_\nu x_0 \geqq m_n,$$

und Gleichheit gilt nur für $\varphi(x) = f^*(x)$, also $f(x) = f^*\left(\frac{x}{x_0}\right)$.

Hat man nun ein nichtnegatives Polynom mit *beliebigem*, aber vo
Null verschiedenem Anfangsglied

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{2n} t_\nu x^\nu,$$

so ist offenbar $t_0 > 0$ und

$$a_0 + \sum_{\nu=0}^{2n} \frac{a_\nu t_\nu}{t_0} x_0^\nu \geqq m_n,$$

oder

$$(8')\qquad \sum_{\nu=0}^{2n} a_\nu t_\nu x_0^\nu \geqq m_n t_0;$$

hier gilt Gleichheit nur für $f(x) = c f^*\left(\frac{x}{x_0}\right)$, $x_0 \neq 0$. c bedeutet eine b
liebige positive Konstante [12]).

---

[11]) Aus einem bekannten Hadamardschen Determinantensatz [vgl. z.
O. Szász, Elem. Beweis des Hadamardschen Determinantensatzes, Math. und natur
Berichte aus Ungarn 27 (1909), S. 172—180] folgt

$$[a_{\nu+\mu}]_0^n \leqq a_0 [a_{\nu+\mu}]_1^n,$$

und Gleichheit gilt nur für $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, ..., $a_n = 0$.

In diesem Falle ist also $m_n = a_0$, in allen andern Fällen $m_n < a_0$; der Fall $a_2 =$
ist aber auszuschließen, denn dann ist $H(u)$ nicht positiv definit, es ist also $m_1 = a_0$ f
$a_1 = 0$ und sonst stets $m_n < a_0$.

[12]) Auch für $t_0 = 0$ gilt offenbar stets die Ungleichheit.

Wir können (8′) in der Gestalt schreiben

$$\sum_{\nu=0}^{2n} a_\nu \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x_0^\nu \geqq f(0)\, m_n;$$

nun sei x_1 eine beliebige reelle Zahl, dann ist mit $f(x)$ zugleich auch das Polynom

$$\psi(x) = f(x + x_1) \text{ nichtnegativ,}$$

also

$$\sum_{\nu=0}^{2n} a_\nu \frac{\psi^{(\nu)}(0)}{\nu!} x_0^\nu \geqq \psi(0)\, m_n,$$

oder

$$\sum_{\nu=0}^{2n} a_\nu \frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!} x_0^\nu \geqq f(x_1)\, m_n;$$

Gleichheit gilt hier nur für $\psi(x) = c f^*\left(\frac{x}{x_0}\right)$, also $f(x) = c f^*\left(\frac{x - x_1}{x_0}\right)$. Somit gilt der

Satz IV′. *Es sei das Polynom* $f(x) = \sum_{\nu=0}^{2n} t_\nu x^\nu$ *nichtnegativ (und nicht* $\equiv 0$*) und die quadratische Form* $\sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu+\mu} u_\nu u_\mu$ *positiv definit, dann ist*

$$\sum_{\nu=0}^{2n} a_\nu \frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!} x_0^\nu \geqq f(x_1) \frac{[a_{\nu+\mu}]_0^n}{[a_{\nu+\mu}]_1^n},$$

und Gleichheit gilt nur für $f(x) = c f^*\left(\frac{x - x_1}{x_0}\right)$, wobei $x_0 \neq 0$, $c > 0$[12a]. $f^*(x)$ *ist das in Satz* IV *bestimmte Polynom.*

Die positiv definite Hermitesche Form $H(u)$ hat auch ein Minimum μ_n unter der Bedingung $|u_n| = 1$; da $H(u)$ sich nicht ändert, wenn man u_ν durch $u_\nu e^{\vartheta i}$ (ϑ reell) ersetzt, so dürfen wir $u_n = 1$ setzen. Zur Bestimmung von μ_n und der zugehörigen u_ν ergibt sich dann das Gleichungssystem

(9)
$$\begin{cases} a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} u_0 + a_n u_1 + \ldots + a_{2n-1} u_n = 0, \\ a_n u_0 + a_{n+1} u_1 + \ldots + a_{2n} u_n = \mu_n; \end{cases}$$

[12a]) Die Ungleichung gilt offenbar auch für $x_0 = 0$, u. z. gilt, mit Rücksicht auf Fußn. [11]), Gleichheit nur, wenn außerdem entweder $f(x_1) = 0$ oder $n = 1$, $a_1 = 0$ ist.

hieraus folgt

$$\mu_n = \frac{[a_{\nu+\mu}]_0^n}{[a_{\nu+\mu}]_0^{n-1}} \text{ [12b)]},$$

und die u_ν sind reell; man bilde mit ihnen das Polynom $\left(\sum_{\nu=0}^{n} u_\nu x^\nu\right)^2 = f_0(x)$.

Nun sei

$$f(x) = t_0 + t_1 x + \ldots + t_{2n-1} x^{2n-1} + x^{2n} \quad (\text{also } t_{2n} = 1)$$

ein nichtnegatives Polynom, dann ist nach Satz I

$$a_0 t_0 + \ldots + a_{2n-1} t_{2n-1} + a_{2n} \geqq \mu_n,$$

und Gleichheit gilt nur für $f(x) = f_0(x)$.

Es gilt somit der

Satz V. *Ist das Polynom* $f(x) = t_0 + \ldots + t_{2n-1} x^{2n-1} + x^{2n}$ *nicht negativ und die quadratische Form* $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu} u_\nu u_\mu$ *positiv definit, so ist*

$$(10) \quad \sum_{\nu=0}^{2n} \frac{a_\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(0) = a_0 t_0 + \ldots + a_{2n-1} t_{2n-1} + a_{2n} \geqq \frac{[a_{\nu+\mu}]_0^n}{[a_{\nu+\mu}]_0^{n-1}} = \mu_n,$$

und Gleichheit gilt nur für $f(x) = \left(\sum_{\nu=0}^{n} u_\nu x^\nu\right)^2 = f_0(x)$, *wobei die* u_ν *durch das Gleichungssystem* (9) *bestimmt sind.*

Zur Bestimmung von μ_n und $f_0(x)$ wird später ein anderer Weg angegeben (vgl. § 4).

Mit $f(x)$ zugleich ist auch

$$\psi(x) = f(x + x_1) = f(x_1) + \ldots + f^{(2n-1)}(x_1) \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n}$$

nichtnegativ, also nach Satz V

$$\sum_{\nu=0}^{2n} \frac{a_\nu}{\nu!} \psi^{(\nu)}(0) = \sum_{\nu=0}^{2n} \frac{a_\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x_1) \geqq \mu_n,$$

und Gleichheit gilt nur für $\psi(x) = f_0(x)$, also $f(x) = f_0(x - x_1)$.

Ist ferner

$$f(x) = t_0 + t_1 x + \ldots + t_{2n} x^{2n}$$

irgendein nichtnegatives Polynom genau $2n$-ten Grades (also $t_{2n} > 0$), liefert die Anwendung der letzten Ungleichung auf $\frac{1}{t_{2n}} f(x)$ das Result

---

[12b]) Es ist, analog zur Fußn. [11]), $\mu_n \leqq a_{2n}$ und Gleichheit gilt nur für $a_n = a_{n+1} = 0, \ldots, a_{2n-1} = 0$; dies trifft nur für $n = 1$, $a_1 = 0$ zu.

$$\sum_{\nu=0}^{2n} \frac{a_\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x_1) \geqq t_{2n}\mu_n \qquad (t_{2n} \neq 0),$$

oder auch

$$\sum_{\nu=0}^{2n} \frac{a_\nu}{\nu!} f^{(\nu)}\left(\frac{x_1}{x_0}\right) \geqq \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}\mu_n \qquad (x_0 \neq 0,\ f^{(2n)}(0) \neq 0),$$

und Gleichheit gilt nur für $f(x) = c f_0\left(x - \frac{x_1}{x_0}\right)$ $(c > 0)$.

Nun ist mit $f(x)$ zugleich auch $\varphi(x) = f(x_0 x)$ nichtnegativ, daher ist auch

$$\sum_{\nu=0}^{2n} \frac{a_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu)}\left(\frac{x_1}{x_0}\right) = \sum_{\nu=0}^{2n} \frac{a_\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x_1) x_0^\nu \geqq \mu_n f^{(2n)}(0) \frac{x_0^{2n}}{(2n)!};$$

hier gilt Gleichheit nur für $\varphi(x) = c f_0\left(x - \frac{x_1}{x_0}\right)$, also

$$f(x) = c f_0\left(\frac{x - x_1}{x_0}\right), \quad x_0 \neq 0, \quad f^{(2n)}(0) \neq 0\ ^{12c}).$$

Dieses gibt zusammengefaßt den

Satz V'. *Ist das Polynom* $f(x) = \sum_{\nu=0}^{2n} t_\nu x^\nu$ *nichtnegativ und* $\not\equiv 0$, *und die quadratische Form* $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu} u_\nu u_\mu$ *positiv definit, so ist*

$$\sum_{\nu=0}^{2n} \frac{a_\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x_1) x_0^\nu \geqq t_{2n} x_0^{2n} \frac{[a_{\nu+\mu}]_0^n}{[a_{\nu+\mu}]_0^{n-1}},$$

x_0, x_1 *sind reelle Konstanten. Gleichheit gilt*[12d]) *nur für* $x_0 \neq 0$, $t_{2n} \neq 0$, $f(x) = c f_0\left(\frac{x - x_1}{x_0}\right)$, *wobei* $f_0(x)$ *das in Satz* V *bestimmte Polynom und* c *eine positive Konstante ist.*

Es ist leicht, die zu den Sätzen IV' und V' analogen Beziehungen für die Zahlenfolge

$$a_{2n},\ a_{2n-1},\ \ldots,\ a_0$$

aufzustellen; sie lauten:

$$\sum_{\nu=0}^{2n} a_{2n-\nu} \frac{x_0^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x_1) \geqq t_{2n} x_0^{2n} \frac{[a_{\nu+\mu}]_0^n}{[a_{\nu+\mu}]_1^n},$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{2n} a_{2n-\nu} \frac{x_0^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x_1) \geqq f(x_1) \frac{[a_{\nu+\mu}]_0^n}{[a_{\nu+\mu}]_0^{n-1}}.$$

[12c]) Für $t_{2n} = 0$ gilt offenbar das $>$ Zeichen; auch für $x_0 = 0$ bleibt die Ungl. richtig und $=$ gilt nur, wenn außerdem $f(x_1) = 0$ oder $n = 1$, $a_1 = 0$ ist. (Vgl. Fußn. [12b]).

[12d]) Abgesehen von den Fällen $x_0 = 0$, $f(x_1) = 0$, bzw. $x_0 = 0$, $n = 1$, $a_1 = 0$.

Um zugleich die Fälle der Gleichheit in einfacher Weise zu bestimmen, verfahre ich folgendermaßen:

Mit $f(x)=\sum_{\nu=0}^{2n} t_\nu x^\nu$ zugleich ist offenbar auch

$$\varphi(x)=\sum_{\nu=0}^{2n} t_{2n-\nu}x^\nu = x^{2n}f\left(\frac{1}{x}\right)\geqq 0.$$

Die Anwendung der Ungleichung (8′) auf $\varphi(x)$ liefert

$$\sum_{\nu=0}^{2n} a_\nu t_{2n-\nu}x_0^\nu \geqq t_{2n}m_n, \tag{11}$$

und Gleichheit gilt nur für

$$\varphi(x)=cf^*\left(\frac{x}{x_0}\right), \quad \text{also} \quad x^{2n}f\left(\frac{1}{x}\right)=cf^*\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

oder

$$f(x)=cx^{2n}f^*\left(\frac{1}{xx_0}\right), \quad \text{wobei} \quad x_0\neq 0, \quad c>0.$$

Schreibt man in (11) $\frac{1}{x_0}$ statt x_0 und multipliziert mit x_0^{2n}, so wird

$$\sum_{\nu=0}^{2n} a_{2n-\nu}\frac{x_0^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(0)\geqq x_0^{2n}t_{2n}m_n,$$

und Gleichheit gilt nur für $f(x)=cx^{2n}f^*\left(\frac{x_0}{x}\right)$ $(x_0\neq 0)$. Hieraus folgt schließlich

$$\sum_{\nu=0}^{2n} a_{2n-\nu}\frac{x_0^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(x_1)\geqq t_{2n}m_n x_0^{2n},$$

und Gleichheit gilt nur für $f(x)=c(x-x_1)^{2n}f^*\left(\frac{x_0}{x-x_1}\right)$ $(x_0\neq 0,\ c>0$

Ähnlich erhält man aus Satz V′ zunächst für $x_1=0$

$$\sum_{\nu=0}^{2n} a_\nu t_{2n-\nu}x_0^\nu \geqq t_0\mu_n x_0^{2n}, \tag{12}$$

und hieraus

$$\sum_{\nu=0}^{2n} a_{2n-\nu}\frac{x_0^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(0)\geqq f(0)\mu_n; \tag{13}$$

Gleichheit gilt in (12) nur für $\varphi(x)=cf_0\left(\frac{x}{x_0}\right)$, also

$$f(x)=cx^{2n}f_0\left(\frac{1}{x_0x}\right), \quad c>0, \quad x_0\neq 0,$$

und in (13) für

$$f(x)=cx^{2n}f_0\left(\frac{x_0}{x}\right), \quad x_0\neq 0.$$

Aus (13) folgt schließlich

$$\sum_{\nu=0}^{2n} a_{2n-\nu} \frac{x_0^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x_1) \geqq f(x_1)\,\mu_n,$$

und Gleichheit gilt nur für $f(x) = c(x-x_1)^{2n} f_0\left(\frac{x_0}{x-x_1}\right)$, $x_0 \neq 0$.

Zusammenfassend gilt der

Satz VI. *Ist das Polynom* $f(x) = \sum_{\nu=0}^{2n} t_\nu x^\nu$ *nichtnegativ und die quadratische Form* $\sum_{\nu=0}^{2n} a_{\nu+\mu} u_\nu u_\mu$ *positiv definit, so ist*

$$\sum_{\nu=0}^{2n} a_{2n-\nu} \frac{x_0^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x_1) \geqq t_{2n} x_0^{2n} \frac{[a_{\nu+\mu}]_0^n}{[a_{\nu+\mu}]_1^n},$$

$$\sum_{\nu=0}^{2n} a_{2n-\nu} \frac{x_0^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x_1) \geqq f(x_1) \frac{[a_{\nu+\mu}]_0^n}{[a_{\nu+\mu}]_0^{n-1}};$$

Gleichheit gilt[13]) *in der ersten Ungleichung nur für*

$$f(x) = c(x-x_1)^{2n} f^*\left(\frac{x_0}{x-x_1}\right), \quad x_0 \neq 0,$$

und in der zweiten für

$$f(x) = c(x-x_1)^{2n} f_0\left(\frac{x_0}{x-x_1}\right), \quad x_0 \neq 0.$$

§ 3.

Anwendung des Satzes II.

1. Man setze

$$a_\nu = \frac{1}{\nu+r} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, 2n),$$

wo r eine reelle positive Zahl bedeutet. Jetzt wird

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu} u_\nu \bar{u}_\mu = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} \frac{u_\nu \bar{u}_\mu}{\nu+\mu+r} = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} u_\nu \bar{u}_\mu \int_0^1 x^{\nu+\mu+r-1}\,dx = \int_0^1 x^{r-1} \left|\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu x^\nu\right|^2 dx,$$

also positiv definit.

Wenn k irgendeine positive ganze Zahl bedeutet, so folgt nun durch mehrfache Anwendung von III′, daß auch die Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} \frac{u_\nu \bar{u}_\mu}{(\nu+\mu+r)^\varkappa}$ positiv definit ist.

[13]) Abgesehen von gewissen bei $x_0 = 0$ bestehenden trivialen Fällen. — Wir setzen stets voraus, daß $f(x)$ nicht identisch verschwindet.

Es seien nun $p, k_1, k_2, \ldots, k_p$ positive ganze und $r_1, r_2, \ldots, r_p$ irgend welche positive Zahlen; ferner sei

$$g(x) = (x + r_1)^{k_1}(x + r_2)^{k_2} \ldots (x + r_p)^{k_p},$$

dann folgt wie oben, daß die Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} \frac{u_\nu \bar{u}_\mu}{g(\nu+\mu)}$ positiv definit ist. $cg(x$ stellt offenbar ein beliebiges Polynom mit nur reellen negativen Wurzeln da

Es sei $\varkappa$ eine reelle Zahl, $\varrho > 0$; ersetzt man u_ν durch $u_\nu e^{-\varkappa\nu}$, s ergibt sich sofort, daß auch die Hermitesche Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} \frac{\varrho^{u_\nu \bar{u}_\mu}}{e^{\varkappa(\nu+\mu)} g(\nu+\mu}$ positiv definit ist. Es gilt also mit Rücksicht auf II der Satz:

Satz VII. *Es sei $\varkappa$ eine reelle Zahl, $g(x)$ ein Polynom mit nu reellen negativen Wurzeln und $f(x) = \sum_{\nu=0}^{2n} t_\nu x^\nu$ ein nichtnegatives Polynom dann haben die Gleichungen*

$$\frac{t_0}{g(0)} + \frac{t_1}{e^{\varkappa} g(1)} x + \ldots + \frac{t_{2n}}{e^{2\varkappa n} g(2n)} x^{2n} = 0$$

$$\frac{f(x)}{g(0)} + \frac{1}{1!}\frac{f'(x)}{e^{\varkappa} g(1)} + \ldots + \frac{1}{(2n)!}\frac{f^{(2n)}(x)}{e^{2\varkappa n} g(2n)} = 0$$

keine reelle Wurzel. Die quadratische Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} \frac{u_\nu u_\mu}{e^{\varkappa(\nu+\mu)} g(\nu-\mu)}$ ist posit definit für jedes n, falls $g(0) > 0$ ist.

Aus der Weierstraßschen Produktdarstellung einer ganzen Fun tion $G(x)$ von der Höhe Null oder Eins mit nur reellen, negativen Nu stellen, ist klar, daß $G(x)$ als Grenzwert von Funktionen der Gesta $e^{\varkappa x} g(x)$ ($g(x)$ ein Polynom mit nur reellen negativen Wurzeln) darste bar ist; aus VII folgt daher:

VII′. *Es sei $G(x)$ eine ganze Funktion von der Höhe Null oder Ei mit nur reellen negativen Nullstellen, $G(0) > 0$; $f(x) = \sum_{\nu=0}^{2n} t_\nu x^\nu$ sei e nichtnegatives Polynom; dann sind auch die Polynome*

$$\frac{t_0}{G(0)} + \frac{t_1}{G(1)} x + \ldots + \frac{t_{2n}}{G(2n)} x^{2n}, \quad \frac{f(x)}{G(0)} + \frac{f'(x)}{1!\,G(1)} + \ldots + \frac{f^{(2n)}(x)}{(2n)!\,G(2n}$$

nichtnegativ. Die quadratische Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \frac{u_\nu u_\mu}{G(\nu+\mu)}$ ist nichtnegativ[14]).

[14]) Es bleibt eine offene Frage, ob die quadratische Form *positiv* definit ist. Für verwandte Überlegungen vgl. man Laguerre, Œuvres I, S. 201.

2. Es sei α eine positive Zahl; man setze

$$t_\nu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha+\nu-1} dx = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu = 0 \\ \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu-1) & \text{für } \nu = 1, 2, \dots; \end{cases}$$

etzt ist

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu} u_\nu \bar{u}_\mu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} \left| \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu x^\nu \right|^2 dx,$$

lso positiv definit.

Setzt man zur Abkürzung $x + \alpha = l(x)$, so ist $a_\nu = l(0)\, l(1) \dots l(\nu-1)$, nd da sich jedes Polynom mit nur reellen negativen Nullstellen $g(x)$ in er Form darstellen läßt $c\, l_1(x)^{k_1} l_2(x)^{k_2} \dots l_p(x)^{k_p}$, so erhält man durch hnliche Überlegung wie oben, die Sätze:

VIII. *Es sei $g(x)$ ein Polynom mit nur reellen negativen Wurzeln,* $(0) > 0$, *und $f(x) = \sum_{\nu=0}^{2n} t_\nu x^\nu$ ein nichtnegatives Polynom; dann haben ie Gleichungen*

$$t_0 + g(0) t_1 x + g(0) g(1) t_2 x^2 + \dots + g(0) g(1) \dots g(2n-1) t_{2n} x^{2n} = 0,$$

$$f(x) + \frac{g(0)}{1!} f'(x) + \frac{g(0) g(1)}{2!} f''(x) + \dots + \frac{g(0) g(1) \dots g(2n-1)}{(2n)!} f^{(2n)}(x) = 0$$

eine reelle Wurzel. Die quadratische Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} g(0) g(1) \dots g(\nu+\mu-1) u_\nu u_\mu$ st positiv definit. (Der Koeffizient von u_0^2 ist Eins.)

VIII′. *Es sei $G(x)$ eine ganze Funktion von der Höhe Null oder Eins mit nur reellen, negativen Nullstellen, $f(x) = \sum_{\nu=0}^{2n} t_\nu x^\nu$ sei ein nicht-negatives Polynom; dann sind auch die Polynome*

$$t_0 + G(0) t_1 x + \dots + G(0) \dots G(2n-1) t_{2n} x^{2n},$$

$$f(x) + \frac{G(0)}{1!} f'(x) + \dots + \frac{G(0) \dots G(2n-1)}{(2n)!} f^{(2n)}(x)$$

nichtnegativ. Die quadratische Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} G(0) \dots G(\nu+\mu-1) u_\nu u_\mu$ ist nichtnegativ[15]).

3. Man kann aus Satz I und II auch auf die Weise spezielle Re-sultate ableiten, daß man für die t_ν besondere Werte ansetzt. Z. B. sind die Polynome

$$1 + x + \dots + x^{2\nu} \quad \text{und} \quad (1+x)^{2\nu} = 1 + 2\nu x + \dots + x^{2\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

[15]) Auch hier ist der Koeffizient von u_0^2 Eins. Es bleibt eine offene Frage, ob die unendliche quadratische Form *positiv* definit ist.

offenbar nichtnegativ. Es gilt daher der

Satz IX. *Der Wertevorrat der Polynome*

$$h_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{2n} x^{2n},$$
$$k_n(x) = a_0 + \binom{2n}{1} a_1 x + \ldots + a_{2n} x^{2n}$$

ist im Wertevorrat der Hermiteschen Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu} u_\nu \bar{u}_\mu$ *für* $u_0 =$ *enthalten; ist insbesondere diese Form positiv definit, so haben di Polynome* $h_\nu(x)$, $k_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *keine reelle Nullstelle*[16]).

Man zeigt leicht, daß auch das Polynom

$$d_\nu(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (2\nu+1)x^{2\nu} > 0$$

ist. Für positive x ist dies klar; für $x < 0$ beweist man es einfach so es ist

$$d_\nu(x) = D_x(x + \ldots + x^{2\nu+1}) = D_x \frac{x(1-x^{2\nu+1})}{1-x} = \frac{1-(2\nu+2)x^{2\nu+1}+(2\nu+1)x^{2}}{(1-x)^2}$$

[16]) Vgl. G. Pólya, a. a. O. [3]), S. 667. — Für $h_n(x)$ schon bei E. B. Van Vleck A sufficient condition for the maximum number of imaginary roots of an equatio of the n-th degree. Annals of Math. (2) 4 (1902–1903), S. 191–192. — Der obi Beweis ist sehr einfach; bei Beschränkung auf das hier Notwendige stellt er sic so: Man setze für reelles ζ

$$e^{\frac{n^2}{2n+1}\pi i} \prod_{\nu=1}^{n} \left(\zeta x - e^{\frac{2\nu\pi i}{2n+1}}\right) = u_0 + u_1 x + \ldots + u_n x^n,$$

dann ist offenbar $u_0 = 1$ und

$$\left(\sum_{\nu=0}^{n} u_\nu x^\nu\right)\left(\sum_{\nu=0}^{n} \bar{u}_\nu x^\nu\right) = 1 + \zeta x + \ldots + (\zeta x)^{2n},$$

und hieraus folgt sofort

$$(\alpha) \qquad \sum_{\nu=0}^{2n} a_\nu \zeta^\nu = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu} u_\nu \bar{u}_\mu.$$

Setzt man ferner

$$(1+\zeta x)^n = v_0 + v_1 x + \ldots + v_n x^n, \quad \text{d. h.} \quad v_\nu = \binom{n}{\nu} \zeta^\nu,$$

so wird

$$\left(\sum_{\nu=0}^{n} v_\nu x^\nu\right)^2 = (1+\zeta x)^{2n},$$

und hieraus folgt

$$(\beta) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \binom{2n}{\nu} a_\nu \zeta^\nu = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu} v_\nu v_\mu = \sum_{\nu,\mu=0}^{n} \binom{n}{\nu}\binom{n}{\mu} \zeta^{\nu+\mu} a_{\nu+\mu},$$

was sich auch direkt leicht bestätigen läßt; (α) und (β) liefern unseren Satz üb $h_n(x)$ und $k_n(x)$.

also

$$d_\nu(-u) = \frac{1+(2\nu+2)u^{2\nu+1}+(2\nu+1)u^{2\nu+2}}{(1+u)^2} > 0 \quad \text{für} \quad u > 0.$$

Offenbar ist auch für jedes $r > 0$

$$p_\nu(x) = \sum_{\varkappa=0}^{2\nu} (\varkappa + r + 1)x^\varkappa > 0 \text{ für reelle } x,$$

denn es ist

$$p_\nu(x) = d_\nu(x) + r\sum_{\varkappa=0}^{2\nu} x^\varkappa.$$

Aus Satz I und den zusätzlichen Bemerkungen folgt nun, daß die Gleichungen

$$(1+r)a_0 + (2+r)a_1 x + \ldots + (2\nu+1+r)a_{2\nu}x^{2\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

keine reelle Wurzel haben, wenn die quadratische Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu}u_\nu u_\mu$ positiv definit ist. Insbesondere haben die Gleichungen

$$a_0 + 2a_1 x + \ldots + (2\nu+1)a_{2\nu}x^{2\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

und somit auch die Gleichungen

$$g_\nu(x) \equiv (2\nu+1)a_0 + 2\nu a_1 x + \ldots + a_{2\nu}x^{2\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

keine reelle Wurzel; $\frac{g_\nu(x)}{2\nu+1}$ ist das $(2\nu+1)$-te arithmetische Mittel der Partialsummen des Polynoms $\sum_{\nu=0}^{2n} a_\nu x^\nu$.

§ 4.

Zusammenhang mit der Stieltjesschen Kettenbruch-Theorie.

Für spezielle Werte der a_ν, wie z. B.

$$a_\nu = \frac{1}{\nu+r}, \quad r \text{ reell} > 0,$$

oder

$$a_\nu = q^{(m+\nu)^2}, \quad q \text{ reell} > 1, \quad m \text{ reell},$$

ist es leicht, die im § 2 auftretenden Determinanten zu berechnen; auch aus gewissen Kettenbruchentwicklungen lassen sich die Größen m_n und μ_n für besondere a_ν mühelos bestimmen. Es ist aber schwierig, die zugehörigen Polynome $f^*(x)$ und $f_0(x)$ nach dem angegebenen Verfahren zu berechnen. Ich gebe daher die Lösung des dort behandelten Minimumproblems in einer Gestalt, die sich auf die Stieltjessche Kettenbruchtheorie stützt und in vielen Fällen m_n, μ_n, $f^*(x)$ und $f_0(x)$ unmittelbar anzugeben gestattet.

Ich zitiere zunächst den

Hilfssatz[17]). *Die quadratische Form* $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu} u_\nu u_\mu$ *sei positiv definit, dann gibt es solche positive Zahlen* $p_0, p_1, \ldots, p_{2n}$ *und reelle Zahlen* $r_0, r_1, \ldots, r_{2n}$, *daß*

$$(-1)^\nu a_\nu = p_0 r_0^\nu + p_1 r_1^\nu + \ldots + p_{2n} r_{2n}^\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, 2n)$$

ist.

Ich definiere ferner $a_{2n+1}, a_{2n+2}, \ldots$ durch die Gleichungen

$$(-1)^\nu a_\nu = p_0 r_0^\nu + p_1 r_1^\nu + \ldots + p_{2n} r_{2n}^\nu \qquad (\nu = 2n+1, 2n+2, \ldots)$$

und betrachte die Kettenbruchentwicklung[18])

$$(K) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^{\nu+1}} = \sum_{\varkappa=0}^{2n} \frac{p_\varkappa}{z+r_\varkappa} \sim \frac{k_1}{|z+l_1|} + \frac{k_2}{|z+l_2|} + \frac{k_3}{|z+l_3|} + \ldots$$

Bekanntlich[19]) ist

$$(14) \qquad a_0 = k_1, \ \frac{[a_{\nu+\mu}]_0^\lambda}{[a_{\nu+\mu}]_0^{\lambda-1}} = (-1)^\lambda k_1, k_2, \ldots, k_{\lambda+1} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

Die quadratische Form $\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu} u_\nu u_\mu$ ist offenbar dann und nur dann definit, wenn k_1 positiv und $k_2, \ldots, k_{n+1}$ negativ sind.

Aus (14) folgt

$$\prod_{\lambda=1}^{m} \frac{[a_{\nu+\mu}]_0^\lambda}{[a_{\nu+\mu}]_0^{\lambda-1}} = \prod_{\lambda=1}^{m} (-1)^\lambda k_1, k_2, \ldots, k_{\lambda+1},$$

also

$$(15) \qquad [a_{\nu+\mu}]_0^m = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} k_1^{m+1} k_2^m \ldots k_{m+1}.$$

---

[17]) Vgl. E. Fischer, Über das Carathéodorysche Problem, Potenzreihen mit positivem reellen Teil betreffend. Rendiconti Circ. Mat. Palermo **32** (1911), S. 240–256 (insbes. § 3, Hilfssatz I).

[18]) Der Kettenbruch heißt zur Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^{\nu+1}}$ bzw. zur Funktion $\sum_{\varkappa=0}^{2n} \frac{p_\varkappa}{z+r_\varkappa}$ assoziiert. Er ist dadurch eindeutig bestimmt, daß die Entwicklung des Näherungsbruches ν-ter Ordnung nach fallenden Potenzen von z mit der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^{\nu+1}}$ bis zur Potenz z^{-2n} einschließlich übereinstimmt; man vgl. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, S. 376.

[19]) Vgl. z. B. Perron, a. a. O. [18]), S. 325, Formel (10).

Offenbar wird jetzt

$$\sum_{\nu=0}^{2n} \frac{a_\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x_1)\, x_0^\nu = \sum_{\varkappa=0}^{2n} p_\varkappa \sum_{\nu=0}^{2n} (-r_\varkappa x_0)^\nu \frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!} = \sum_{\varkappa=0}^{2n} p_\varkappa f(x_1 - r_\varkappa x_0),$$

nd

$$\sum_{\nu=0}^{2n} \frac{a_{2n-\nu}}{\nu!} f^{(\nu)}(x_1)\, x_0^\nu = \sum_{\varkappa=0}^{2n} p_\varkappa \sum_{\nu=0}^{2n} (-r_\varkappa)^{2n-\nu} x_0^\nu \frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!} = \sum_{\varkappa=0}^{2n} p_\varkappa r_\varkappa^{2n} f\left(x_1 - \frac{x_0}{r_\varkappa}\right),$$

vobei nur über die von Null verschiedenen $r_\varkappa$ zu summieren ist.

Um nun $f^*(x)$ bzw. $f_0(x)$ zu bestimmen, verfahre ich folgendermaßen. Der Näherungsnenner ν-ter Ordnung des Kettenbruches (K) sei $L_\nu(z)$, also $L_0 = 1$, $L_1 = z + l_1$, $L_2 = (z + l_1)(z + l_2) + k_2, \ldots$ Nun ist

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{n} a_{\nu+\mu}\, u_\nu\, u_\mu = \sum_{\varkappa=0}^{2n} \left[\sum_{\nu=0}^{2n} u_\nu (-r_\varkappa)^\nu\right]^2 p_\varkappa,$$

nd dieser Ausdruck soll zum Minimum werden zunächst unter der Bedingung $u_0 = 1$. Zu diesem Zweck setze ich

16) $$\sum_{\nu=0}^{n} u_\nu x^\nu = g_0 L_0(x) + g_1 L_1(x) + \ldots + g_n L_n(x),$$

o daß

$$u_0 = \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu L_\nu(0)$$

st; dann sind $g_0, g_1, \ldots, g_n$ so zu bestimmen, daß

$$Q_n \equiv \sum_{\nu=0}^{2n} [g_0 L_0(-r_\varkappa) + g_1 L_1(-r_\varkappa) + \ldots + g_n L_n(-r_\varkappa)]^2 p_\varkappa$$

um Minimum wird unter der Bedingung

17) $$g_0 L_0(0) + g_1 L_1(0) + \ldots + g_n L_n(0) = 1.$$

Nun ist aber[20])

$$\sum_{\varkappa=0}^{2n} L_\alpha(-r_\varkappa) L_\beta(-r_\varkappa) p_\varkappa = \begin{cases} 0 \text{ für } \alpha \neq \beta \\ (-1)^\alpha k_1 k_2 \ldots k_{\alpha+1} \text{ für } \alpha = \beta, \end{cases}$$

lso

18) $$Q_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu^2 k_1 k_2 \ldots k_{\nu+1}.$$

---

[20]) Vgl. Perron, a. a. O. [18]), S. 379. Offenbar kann $\sum_{\varkappa=0}^{2n} \frac{p_\varkappa}{z + r_\varkappa}$ in Gestalt eines tieltjesschen Integrals geschrieben werden: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z + x}$, mit niemals abnehmendem $\psi(x)$.

Setzt man daher vorübergehend

$$(-1)^\nu g_\nu^2 k_1 k_2 \dots k_{\nu+1} = v_\nu^2 \quad \text{oder} \quad v_\nu = g_\nu \sqrt{(-1)^\nu k_1 k_2 \dots k_{\nu+1}},$$

so kann unsere Aufgabe so formuliert werden:

Es soll

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{v_\nu L_\nu(0)}{\sqrt{(-1)^\nu k_1 k_2 \dots k_{\nu+1}}}$$

zum Maximum werden unter der Bedingung

$$\sum_{\nu=0}^{n} v_\nu^2 = \text{constans};$$

dies wird offenbar nur für

$$v_\nu = \frac{L_\nu(0) \cdot \gamma}{\sqrt{(-1)^\nu k_1 k_2 \dots k_{\nu+1}}} \qquad (\gamma \text{ eine Konstante})$$

erreicht. Es ist dann

$$g_\nu = \frac{L_\nu(0) \cdot \gamma}{(-1)^\nu k_1 k_2 \dots k_{\nu+1}} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n), \tag{19}$$

und γ wird nach (17) durch die Gleichung bestimmt

$$\gamma \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{L_\nu(0)^2}{k_1 k_2 \dots k_{\nu+1}} = 1. \tag{20}$$

Schließlich wird aus (18) bis (20)

$$\operatorname*{Min}_{u_0=1} Q_n = m_n = \gamma^2 \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{L_\nu(0)^2}{k_1 k_2 \dots k_{\nu+1}} \tag{21}$$

$$= \gamma = 1 : \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{L_\nu(0)^2}{k_1 k_2 \dots k_{\nu+1}},$$

und aus (16)

$$f^*(x) = \gamma^2 \Big(\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{L_\nu(0) L_\nu(x)}{k_1 k_2 \dots k_{\nu+1}} \Big)^2.$$

Noch einfacher ergibt sich die Lösung der Minimumaufgabe unter der Bedingung $u_n = 1$. Denn aus (16) folgt $u_n = g_n$, es ist also das Minimum von $\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu g_\nu^2 k_1 k_2 \dots k_{\nu+1}$ zu bestimmen für $g_n = 1$. Hierfür findet man sofort (wegen $(-1)^\nu k_1 k_2 \dots k_{\nu+1} > 0$): $g_0 = 0$, $g_1 = 0$, $\dots$ $g_{n-1} = 0$, somit ist

$$\operatorname*{Min}_{u_n=1} Q_n = \mu_n = (-1)^n k_1 k_2 \dots k_{n+1}$$

und

$$f_0(x) = L_n(x)^2.$$

Der unter (21) gefundene Ausdruck für m_n läßt sich in gewissen Fällen durch einfachere Ausdrücke ersetzen:

a) Es sei auch die Entwicklung bekannt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{\nu+2}}{z^{\nu+1}} \sim \frac{\varkappa_1 \,|}{|\, z+\lambda_1} + \frac{\varkappa_2 \,|}{|\, z+\lambda_2} + \frac{\varkappa_3 \,|}{|\, z+\lambda_3} + \dots,$$

dann ist entsprechend der Formel (15)

$$[a_{\nu+\mu}]_1^n = (-1)^{\frac{(n-1)\,n}{2}} \varkappa_1^n \varkappa_2^{n-1} \dots \varkappa_n,$$

also nach (7′)

$$m_n = (-1)^n \frac{k_1^{n+1} k_2^n \dots k_{n+1}}{\varkappa_1^n \varkappa_2^{n-1} \dots \varkappa_n}. \tag{22}$$

b) Kennt man auch den korrespondierenden Kettenbruch der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^{\nu+1}}$

$$\frac{\alpha_1 \,|}{|\, z} + \frac{\alpha_2 \,|}{|\, 1} + \frac{\alpha_3 \,|}{|\, z} + \frac{\alpha_4 \,|}{|\, 1} + \dots, \tag{23}$$

und ist $\frac{A_n(z)}{B_n(z)}$ sein Näherungsbruch n-ter Ordnung, so stimmt die Entwicklung von $\frac{A_n(z)}{B_n(z)}$ nach fallenden Potenzen von z bis zur Potenz z^{-n} einschließlich mit der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^{\nu+1}}$ überein[21]). Es bestehen dann die Beziehungen[22])

$$k_1 = \alpha_1, \quad k_{\nu+1} = -\alpha_{2\nu}\alpha_{2\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \dots),$$
$$L_\nu(z) = B_{2\nu}(z),$$

und aus der Rekursionsformel für die B_ν findet man

$$B_0 = 1, \quad B_{2\nu}(0) = \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2\nu}.$$

Hieraus ist klar, daß die quadratische Form $H(u)$ dann und nur dann positiv definit ist, wenn

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_{2\nu}\alpha_{2\nu+1} > 0 \qquad (\text{für } \nu = 1, 2, \dots, n)$$

ist. Ferner ist offenbar

$$k_1 k_2 \dots k_{\nu+1} = (-1)^\nu \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2\nu+1},$$
$$L_\nu(0) = \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2\nu}, \tag{24}$$

also

$$m_n = 1 : \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2\nu}}{\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2\nu+1}}\ ^{23}),$$

---

[21]) Vgl. Perron, a. a. O. [18]), S. 375.

[22]) Vgl. Perron, a. a. O. [18]), S. 331 und S. 376.

[23]) Für $\nu = 0$ ist das entsprechende Glied $= \frac{1}{\alpha_1}$.

$$\mu_n = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2n+1},$$

$$f^*(x) = m_n^2 \Big(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2\nu+1}} B_{2\nu}(x) \Big)^2,$$

$$f_0(x) = B_{2n}(x)^2.$$

Auch $f^*(x)$ läßt sich in einfacherer Gestalt angeben, wenn man eine Bemerkung von Stieltjes[24]) benutzt. Demnach ist

$$f^*(x) = \Big(\frac{m_n B_{2n+1}(x)}{x \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n+1}} \Big)^2;$$

die Beziehung

$$\frac{B_{2n+1}(x)}{x \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n+1}} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{B_{2n}(x)}{\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2n+1}}$$

läßt sich durch wiederholte Anwendung der Rekursionsformel

$$B_{2\nu+1}(x) = x B_{2\nu}(x) + \alpha_{2\nu+1} B_{2\nu-1}(x)$$

leicht direkt bestätigen.

c) Sei ferner

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{\nu+1}}{z^\nu} \sim \frac{\beta_1|}{|z} + \frac{\beta_2|}{|1} + \frac{\beta_3|}{|z} + \dots,$$

dann ist analog zu (24)

$$\varkappa_1 \varkappa_2 \dots \varkappa_\nu = (-1)^{\nu-1} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{2\nu-1}; \tag{25}$$

aus (22), (24) und (25) folgt nun

$$m_n = \frac{\alpha_1^{n+1} (\alpha_2 \alpha_3)^n \dots (\alpha_{2n} \alpha_{2n+1})}{\beta_1^n (\beta_2 \beta_3)^{n-1} \dots (\beta_{2n-2} \beta_{2n-1})}.$$

---

[24]) Vgl. T. J. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, Mém. prés. par div. sav. à l'Acad. des sciences Paris 32, Nr. 2; insbes. S. 134—135 und S. 162—163. — Auch abgedruckt in den Ann. de la Fac. des sciences de Toulouse 8 (1894), 9 (1895). — Stieltjes bestimmt das Minimum von $\int_0^\infty \Big(1 + \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu x^\nu\Big)^2 d\psi(x)$ bei variablem u_ν. — Heine (Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl. 1878—1881), Bd. 2, S. 29—31) bestimmt das Minimum von $\int_a^b \Big(f(x) - \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu x^\nu\Big)^2 \varphi(x)\, dx$, wo $f(x)$ eine gegebene stetige, $\varphi(x)$ eine integrierbare Funktion ist; allgemeiner bei Perron a. a. O. [18]), S. 380—381; für $f(x) = -x^{n+1}$ ergibt sich hieraus μ_{n+1} und $f_0(x)$, jedoch in weniger einfacher Form als oben angegeben.

Zusammenfassend können wir sagen:

X. *Aus den formalen Kettenbruchentwicklungen*

26) $$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{z^{\nu+1}} \sim \frac{k_1\,|}{|\,z+l_1} + \frac{k_2\,|}{|\,z+l_2} + \ldots \sim \frac{\alpha_1|}{|\,z} + \frac{\alpha_2|}{|\,1} + \frac{\alpha_3|}{|\,z} + \ldots,$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_{\nu+1}}{z^{\nu}} \sim \frac{\varkappa_1\,|}{|\,z+\lambda_1} + \frac{\varkappa_2\,|}{|\,z+\lambda_2} + \ldots \sim \frac{\beta_1|}{|\,z} + \frac{\beta_2|}{|\,1} + \frac{\beta_3|}{|\,z} + \ldots,$$

rgeben sich für die in IV *und* V *eingeführten Größen* m_n, μ_n, $f^*(x)$, $_n(x)$ *die Ausdrücke*

$$m_n = 1 : \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu \frac{L_\nu(0)^2}{k_1 k_2 \ldots k_{\nu+1}} = (-1)^n \frac{k_1^{n+1} k_2^n \ldots k_{n+1}}{\varkappa_1^n \varkappa_2^{n-1} \ldots \varkappa_n}$$

$$= 1 : \sum_{\nu=0}^{n}\frac{\alpha_2\,\alpha_4 \ldots \alpha_{2\nu}}{\alpha_1\,\alpha_3 \ldots \alpha_{2\nu+1}} = \frac{\alpha_1^{n+1}(\alpha_2\alpha_3)^n \ldots (\alpha_{2n}\,\alpha_{n+1})}{\beta_1^n(\beta_2\beta_3)^{n-1} \ldots (\beta_{2n-2}\,\beta_{2n-1})},$$

$$\mu_n = (-1)^n k_1 k_2 \ldots k_{n+1} = \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \ldots \alpha_{2n+1},$$

$$f^*(x) = \left(m_n \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu \frac{L_\nu(0)\,L_\nu(x)}{k_1 k_2 \ldots k_{\nu+1}}\right)^2$$

$$= \left(m_n \sum_{\nu=0}^{n}\frac{B_{2\nu}(x)}{\alpha_1\,\alpha_3 \ldots \alpha_{2\nu+1}}\right)^2 = \left(\frac{m_n B_{2n+1}(x)}{x\,\alpha_1\,\alpha_3 \ldots \alpha_{2n+1}}\right)^2,$$

$$f_0(x) \quad L_n(x)^2 = B_{2n}(x)^2.$$

Dabei bedeutet $L_\nu(z)$ *bzw.* $B_\nu(z)$ *den Näherungsbruch* ν*-ter Ordnung der eiden Kettenbrüche in* (26).

Die Werte von $a_{2n+1}, a_{2n+2}, \ldots$ sind offenbar auf das Resultat ohne Einfluß.

Zum Schluß stehe hier noch folgende Bemerkung: Besitzt das tieltjessche Integral $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi(x)}{z+x}$ die formale Entwicklung $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{z^{\nu+1}}$, d. h. ist

$$a_\nu = \int_{-\infty}^{\infty}(-x)^\nu d\psi(x),$$

wird

$$\sum_{\nu=0}^{2n}\frac{a_\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(x_1)\,x_0^\nu = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{2n}\frac{(-x\,x_0)^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(x_1)\Big)\,d\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}f(x_1 - x\,x_0)\,d\psi(x),$$

nd

$$\frac{n-\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(x_1)\,x_0^\nu = \int_{-\infty}^{\infty}x^{2\nu}\Big(\sum_{\nu=0}^{2n}\Big(-\frac{x_0}{x}\Big)^\nu\frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!}\Big)\,d\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}x^{2n}f\Big(x_1 - \frac{x_0}{x}\Big)\,d\psi(x).$$

§ 5.

Anwendung auf spezielle Fälle.

Mit Hilfe des vorstehenden Satzes sind wir imstande, für viele besondere Wertesysteme der a_ν die zugehörigen Größen m_n, μ_n, $f^*(x)$ und $f_0(x)$ zu berechnen. Hier seien einige bemerkenswerte Fälle angeführt.

1. Bekanntlich ist[25])

$$(27)\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{e^{-x}x^{\alpha-1}dx}{z+x} \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{\Gamma(\alpha)}{z}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^2}+\frac{\Gamma(\alpha+2)}{z^3}-+\ldots\right]$$
$$\sim \frac{1|}{|z}+\frac{\alpha|}{|1}+\frac{1|}{|z}+\frac{\alpha+1|}{|1}+\frac{2|}{|z}+\frac{\alpha+2|}{|1}+\ldots,$$

also für $\alpha > 0$ und

$$a_0=1,\quad a_\nu=(-1)^\nu\frac{\Gamma(\alpha+\nu)}{\Gamma(\alpha)}=(-1)^\nu\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)$$

ist die quadratische Form $H(u)$ positiv definit. Ferner ist jetzt

$$\frac{a_2}{z}+\frac{a_3}{z^2}+\ldots=\alpha(\alpha+1)\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\left(\frac{\Gamma(\alpha+2)}{z}-\frac{\Gamma(\alpha+3)}{z^2}+-\ldots\right),$$

und diese Reihe besitzt offenbar den korrespondierenden Kettenbruch

$$\frac{\alpha(\alpha+1)|}{|z}+\frac{\alpha+2|}{|1}+\frac{1|}{|z}+\frac{\alpha+3|}{|1}+\frac{2|}{|z}+\ldots.$$

Nun wird in Satz X

$$\mu_n=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2n+1}=n!\,\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1),$$
$$\alpha_1^{n+1}(\alpha_2\alpha_3)^n\ldots(\alpha_{2n}\alpha_{2n+1})=1!\,2!\ldots n!\,\alpha^n(\alpha+1)^{n-1}\ldots(\alpha+n-1),$$
$$\beta_1^n(\beta_2\beta_3)^{n-1}\ldots(\beta_{2n-2}\beta_{2n-1})=1!\,2!\ldots(n-1)!\,\alpha^n(\alpha+1)^n(\alpha+2)^{n-1}\ldots(\alpha+n),$$

also

$$m_n=\frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}.$$

Aus IV′, V′, VI und X folgt nun der

Satz XI. *Ist das Polynom* $f(x)=\sum_{\nu=0}^{2n}t_\nu x^\nu$ *nichtnegativ und* α *eine positive Zahl, so wird*

$$(28)\qquad f(x_1)+\sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^\nu\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}{\nu!}f^{(\nu)}(x_1)x_0^\nu$$
$$\geqq f(x_1)\frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)},$$

[25]) Vgl. Perron, a. a. O. [15]), S. 392.

29) $$f(x_1)+\sum_{\nu=1}^{2n}(-1)^\nu\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu-1)}{\nu!}f^{(\nu)}(x_1)x_0^\nu \geqq n!\,t_{2n}\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)x_0^{2n},$$

30) $$\sum_{\nu=0}^{2n-1}(-1)^\nu\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2n-\nu-1)}{\nu!}f^{(\nu)}(x_1)x_0^\nu+t_{2n}x_0^{2n} \geqq f(x_1)n!\,\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1),$$

31) $$\sum_{\nu=0}^{2n-1}(-1)^\nu\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+2n-\nu-1)}{\nu!}f^{(\nu)}(x_1)x_0^\nu+t_{2n}x_0^{2n} \geqq t_{2n}x_0^{2n}\frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}.$$

leichheit gilt in[25a]) (28) *nur für* $x_0\neq 0$ *und*

$$f(x)=\frac{c}{(x-x_1)^2}\left[B_{2n+1}\left(\frac{x-x_1}{x_0}\right)\right]^2$$

(29) *für* $x_0\neq 0$ *und*

$$f(x)=c\left[B_{2n}\left(\frac{x-x_1}{x_0}\right)\right]^2,$$

(30) *für* $x_0\neq 0$ *und*

$$f(x)=c(x-x_1)^{2n}\left[B_{2n}\left(\frac{x_0}{x-x_1}\right)\right]^2,$$

nd in (31) *für* $x_0\neq 0$ *und*

$$f(x)=c(x-x_1)^{2n+2}\left[B_{2n+1}\left(\frac{x_0}{x-x_1}\right)\right]^2.$$

$_\nu(z)$ *bedeutet den Näherungsnenner* ν*-ter Ordnung des Kettenbruches* 7) *und* c *eine positive Konstante.*

Für $\alpha=1$, $x_0=-1$ z. B. wird aus (28)—(29)

2) $$\sum_{\nu=0}^{2n}f^{(\nu)}(x_1)\geqq\frac{f(x_1)}{n+1}\quad\text{und}\quad\sum_{\nu=0}^{2n}f^{(\nu)}(x_1)\geqq t_{2n}(n!)^2;$$

eichheit gilt in der ersteren Ungleichung nur für[26])

$$f(x)=\frac{c}{(x-x_1)^2}[B_{2n+1}(x_1-x)]^2,$$

d in der zweiten für

$$f(x)=c[B_{2n}(x_1-x)]^2.$$

[25a]) Abgesehen vom trivialen Fall $x_0=0$, $f(x_1)=0$.

[26]) Dies hat auf anderem Wege schon Herr G. Szegő bewiesen; man vgl. seine kurzem erschienene Arbeit: Ein Beitrag zur Theorie der Polynome von Laguerre d Jacobi, Math. Zeitschr., 1 (1918), S. 341—356 (insb. S. 348). Auch die zweite gleichung hat Herr Szegő abgeleitet, wie er mir brieflich mitteilte. — Für weitere gleichungen über nichtnegative Polynome vgl. Szegő, Über Orthogonalsysteme von ynomen, Math. Z. tschr., 4 (1919), S. 139—151, insbes. § 6.

$B_\nu(z)$ bedeutet jetzt den Näherungsnenner ν-ter Ordnung des Kettenbruches

$$\frac{1|}{|z}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|z}+\frac{2|}{|1}+\frac{2|}{|z}+\frac{3|}{|1}+\frac{3|}{|z}+\frac{4|}{|1}+\frac{4|}{|z}+\ldots;$$

die $\frac{B_{2\nu}}{\nu!}$ sind die Laguerreschen Polynome. Die in (32) enthaltene Ungleichung

$$f(x)+f'(x)+f''(x)+\ldots+f^{2n}(x)>0$$

hat schon A. Hurwitz[27]) bewiesen.

Aus den Ungleichungen (30), (31) leite ich zwei andere ab. Zunächst kann ich dafür schreiben

$$\sum_{\nu=0}^{2n}(-1)^\nu\frac{\Gamma(\alpha+2n-\nu)}{\nu!}f^{(\nu)}(x_1)x_0^\nu\geqq f(x_1)\cdot n!\cdot\Gamma(\alpha+n)$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{2n}(-1)^\nu\frac{\Gamma(\alpha+2n-\nu)}{\nu!}f^{(\nu)}(x_1)x_0^\nu\geqq t_{2n}x_0^{2n}\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}\cdot n!.$$

Setzt man hierin

$$\alpha=1-2n-\delta,$$

wobei sich aus $\alpha>0$ für δ die Bedingung

$$\delta<1-2n$$

ergibt, so wird

$$(33)\quad \sum_{\nu=0}^{2n}(-1)^\nu\frac{\Gamma(1-\delta-\nu)}{\nu!}f^{(\nu)}(x_1)x_0^\nu\geqq\begin{cases}f(x_1)\cdot n!\,\Gamma(1-n-\delta)\\ t_{2n}x_0^{2n}\cdot n!\,\dfrac{\Gamma(1-2n-\delta)\,\Gamma(2-2n-\delta)}{\Gamma(2-n-\delta)}\end{cases}$$

Gleichheit gilt für

$$f(x)=c(x-x_1)^{2n}\left[Q_{2n}\left(\frac{x_0}{x-x_1}\right)\right]^2$$

bzw. für

$$f(x)=c(x-x_1)^{2n+2}\left[Q_{2n+1}\left(\frac{x_0}{x-x_1}\right)\right]^2,$$

dabei ist $x_0\neq 0$ und

$$(34)\quad \frac{1|}{|z}+\frac{1-2n-\delta|}{|1}+\frac{1|}{|z}+\frac{2-2n-\delta|}{|1}+\frac{2|}{|z}+\ldots+\frac{\nu-2n-\delta|}{|1}=\frac{P_{2\nu}(z)}{Q_{2\nu}(z)}$$
$$(\nu=1,2,\ldots,n).$$

[27]) Vgl. A. Hurwitz, Über die Nullstellen der Besselschen Funktion, Math. Ann., **33** (1889), S. 246–266 (insbes. S. 259). Daß $\Sigma a^\nu f^{(\nu)}(x)>0$, wenn durchweg $f(x)>0$, hat schon Hermite behauptet [Nouv. Ann. de Math. (2), **5** (1866), S. 43; Question 777] und J. Graindorge [Ebenda, S. 524] bewiesen. Auf $f(x)\geqq 0$ läßt sich der Beweis leicht ausdehnen. Ebenda [S. 432, Question 775] gibt Sylvester die speziellere Ungl. $\sum_0^{2n}\frac{x^\nu}{\nu!}>0$.

un ist allgemein

$$\Gamma(1-x)\,\Gamma(x)=\frac{\pi}{\sin \pi x},$$

so wird aus (33)

$$\frac{\pi}{\sin \pi \delta}\sum_{\nu=0}^{2n}\frac{f^{(\nu)}(x_1)\,x_0^{\nu}}{\nu!\,\Gamma(\delta+\nu)} \gtreqless \begin{cases} n!\, f(x_1)\,\Gamma(1-n-\delta) \\ n!\, t_{2n}\,x_0^{2n}\,\dfrac{\Gamma(2-2n-\delta)\,\Gamma(1-2n-\delta)}{\Gamma(2-2n-\delta)}. \end{cases}$$

sbesondere für $x_1=0$ erhält man hieraus

$$\frac{\pi}{\sin \pi \delta}\sum_{\nu=0}^{2n}\frac{t_\nu x_0^{\nu}}{\Gamma(\delta+\nu)} \gtreqless \begin{cases} n!\, t_0\,\Gamma(1-n-\delta) \\ n!\, t_{2n}\,x_0^{2n}\,\dfrac{\Gamma(2-2n-\delta)\,\Gamma(1-2n-\delta)}{\Gamma(2-n-\delta)}. \end{cases}$$

ie darin enthaltene Beziehung

$$\frac{\pi}{\sin \pi \delta}\sum_{\nu=0}^{2n}\frac{t_\nu x_0^{\nu}}{\Gamma(\delta+\nu)} > 0$$

t schon Hurwitz[28]) bewiesen.

lgemein gilt also der

Satz XII. *Es sei* $f(x)=\sum_{\nu=0}^{2n} t_\nu x^\nu$ *ein nichtnegatives Polynom und* $< 1-2n$, *dann ist*

$$\frac{\pi}{\sin \pi \delta}\sum_{\nu=0}^{2n}\frac{f^{\nu}(x_1)\,x_0^{\nu}}{\nu!\,\Gamma(\delta+\nu)} \gtreqless \begin{cases} f(x_1)\,n!\,\Gamma(1-n-\delta), \\ t_{2n}\,x_0^{2n}\,\dfrac{n!\,\Gamma(2-2n-\delta)\,\Gamma(1-2n-\delta)}{\Gamma(2-n-\delta)}; \end{cases}$$

eichheit gilt hier für

$$f(x)=c\,Q_{2n}\left(\frac{x_0}{x-x_1}\right)^2 \text{ bzw. für } f(x)=c\,(x-x_1)^{2n+2}\left(Q_{2n+1}\left(\frac{x_0}{x-x_1}\right)\right)^2,$$

$Q_\nu(z)$ *durch* (34) *erklärt ist und* $x_0 \neq 0$ *sein soll.*

2. Die hypergeometrische Reihe

$$F(\alpha,1,\gamma;x)=1+\frac{\alpha}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\dots$$

sitzt bekanntlich[29]) die Kettenbruchentwicklung

$$\frac{1}{F(\alpha,1,\gamma;x)} \sim 1-\frac{\frac{\alpha}{\gamma}x\Big|}{|\,1}\;\frac{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma(\gamma+1)}x\Big|}{|\,1}\;\frac{\frac{(\alpha+1)\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}x\Big|}{|\,1}-\dots$$
$$\sim 1-\frac{c_1 x\Big|}{|\,1}\;\frac{c_2 x\Big|}{|\,1}\;\frac{c_3 x\Big|}{|\,1}-\dots,$$

[28]) A. Hurwitz, a. a. O. [27]), S. 259.

[29]) Vgl. Perron, a. a. O. [18]), S. 312.

wobei

$$c_1 = \frac{\alpha}{\gamma}, \qquad c_{2\nu} = \frac{\nu(\gamma-\alpha+\nu-1)}{(\gamma+2\nu-2)(\gamma+2\nu-1)}, \qquad c_{2\nu+1} = \frac{(\alpha+\nu)(\gamma+\nu-1)}{(\gamma+2\nu-1)(\gamma+2\nu)}$$

$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Hieraus folgt

$$F(\alpha, 1, \gamma; x) \sim \frac{1|}{|1} - \frac{c_1 x|}{|1} - \frac{c_2 x|}{|1} - \frac{c_3 x|}{|1} - \ldots,$$

und schließlich

$$x F(\alpha, 1, \gamma; x) \sim \frac{x|}{|1} - \frac{c_1 x|}{|1} - \frac{c_2 x|}{|1} - \frac{c_3 x|}{|1} - \ldots.$$

Jetzt ist also

$$(35) \qquad a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad a_\nu = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+\nu-1)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -c_1 = -\frac{\alpha}{\gamma}, \quad \alpha_{2\nu} = -c_{2\nu-1} = -\frac{(\alpha+\nu-1)(\gamma+\nu-2)}{(\gamma+2\nu-3)(\gamma+2\nu-2)} \quad (\nu \geqq 2$$

$$\alpha_{2\nu+1} = -c_{2\nu} = -\frac{\nu(\gamma-\alpha+\nu-1)}{(\gamma+2\nu-2)(\gamma+2\nu-1)} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Es sei

$$\alpha_{2\nu}\alpha_{2\nu+1} > 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n;$$

dies ist z. B. für

$$\gamma > \alpha > 0$$

oder für

$$\alpha < \gamma < -2n+1$$

der Fall.

Ferner ist

$$\begin{aligned} a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} x + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^2 + \ldots \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \left[x + \frac{\alpha+2}{\gamma+2} x^2 + \frac{(\alpha+2)(\alpha+3)}{(\gamma+2)(\gamma+3)} x^3 + \ldots \right. \\ &= x \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} F(\alpha+2, 1, \gamma+2; x). \end{aligned}$$

Setzt man also

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu x^{\nu-1} \sim \frac{\beta_1 x|}{|1} + \frac{\beta_2 x|}{|1} + \frac{\beta_3 x|}{|1} + \ldots,$$

so wird

$$\beta_1 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}, \qquad \beta_{2\nu} = -\frac{(\alpha+\nu+1)(\gamma+\nu)}{(\gamma+2\nu-1)(\gamma+2\nu)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots$$

$$\beta_{2\nu+1} = -\frac{\nu(\gamma-\alpha+\nu-1)}{(\gamma+2\nu)(\gamma+2\nu-1)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots$$

Eine kurze Rechnung ergibt jetzt

$$m_n = \frac{\alpha_1^{n+1}(\alpha_2\alpha_3)^n \ldots (\alpha_{2n}\alpha_{2n+1})}{\beta_1^n(\beta_2\beta_3)^{n-1}\ldots(\beta_{2n-2}\beta_{2n-1})} = n! \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{\gamma-\alpha+\lambda-1}{(\alpha+\lambda)(\gamma+\lambda-1)}.$$

Aus IV′, V′ und X folgt nun der

Satz XIII. *Das Polynom* $f(x)=\sum_{\nu=0}^{2n} t_\nu x^\nu$ *sei nichtnegativ, und es sei*
weder $\gamma > \alpha > 0$, *oder* $\alpha < \gamma < -2n+1$; *dann ist*

$$36) \quad f(x_1)+\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu-1)}{\gamma(\gamma-1)\dots(\gamma+\nu-1)}\frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!}x_0^\nu$$

$$\geqq \begin{cases} n!\, f(x_1)\prod_{\nu=1}^{n}\dfrac{\gamma-\alpha+\nu-1}{(\gamma+\nu-1)(\alpha+\nu)}, \\ n!\, t_{2n}\dfrac{\prod_{\nu=0}^{n-1}(\alpha+\nu)\prod_{\nu=0}^{n-2}(\gamma+\nu)\prod_{\nu=0}^{n-1}(\gamma-\alpha+\nu)}{\prod_{\nu=0}^{2n-2}(\gamma+\nu)^2\cdot(\gamma+2n-1)}x_0^{2n}; \end{cases}$$

Gleichheit gilt hier für

$$f(x)=c\left[B_{2n+1}\left(\frac{x-x_1}{x_0}\right)\right]^2\frac{1}{(x-x_1)^3}$$

bzw. für

$$f(x)=c\left[B_{2n}\left(\frac{x-x_1}{x_0}\right)\right]^2, \qquad c>0,\ x_0\neq 0,$$

und $B_n(z)$ *bedeutet den Näherungsnenner n-ter Ordnung des Kettenbruches*

$$\frac{1}{|z|}-\frac{\frac{\alpha}{\gamma}}{|1|}-\frac{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma(\gamma-1)}}{|z|}-\frac{\frac{(\alpha-1)\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}}{|1|}-\frac{\frac{2(\gamma-\alpha+1)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}}{|z|}-\dots.$$

Insbesondere für

$$\alpha=r, \qquad \gamma=1+r$$

und entweder $r>0$ oder $r<-2n$, folgt aus Satz XIII:

$$37) \quad r\sum_{\nu=0}^{2n}\frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!}\frac{x_0^\nu}{\nu+r}\geqq\begin{cases} f(x_1)\left[\dfrac{n!}{(r+1)(r+2)\dots(r+n)}\right]^2, \\ \dfrac{t_{2n}x_0^{2n}}{2n+r}\left[\dfrac{n!}{(n+r)(n+r+1)\dots(2n+r-1)}\right]. \end{cases}$$

Hier gilt Gleichheit nur für

$$f(x)=\frac{c}{(x-x_1)^2}\left[B_{2n+1}\left(\frac{x-x_1}{x_0}\right)\right]^2,$$

bzw. für

$$f(x)=c\left[B_{2n}\left(\frac{x-x_1}{x_0}\right)\right]^2, \qquad x_0\neq 0,$$

wobei $B_n(z)$ den Näherungsnenner n-ter Ordnung des Kettenbruches

$$(38)\quad \frac{1}{|z} - \frac{\frac{r}{r+1}}{|1} - \frac{\frac{1^2}{(r+1)(r+2)}}{|z} - \frac{\frac{(r+1)^2}{(r+2)(r+3)}}{|1} - \frac{\frac{2^2}{(r+3)(r+4)}}{|z} - \dots$$

bedeutet.

3. Bekanntlich ist[30])

$$\frac{1}{\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu^2} x^\nu} \sim 1 - \frac{qx}{|1} + \frac{q(1-q^2)x}{|1} - \frac{q^5 x}{|1} + \frac{q^3(1-q^4)x}{|1} - \frac{q^9 x}{|1} + \dots,$$

also

$$(39)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu^2} x^{\nu+1} \sim \frac{x}{|1} - \frac{qx}{|1} + \frac{q(1-q^2)x}{|1} - \frac{q^5 x}{|1} + \dots,$$

und hieraus[31])

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{\nu^2}}{z^{\nu+1}} \sim \frac{1}{|z} - \frac{q}{|1} + \frac{q(1-q^2)}{|z} - \frac{q^5}{|1} + \dots.$$

Es ist leicht auch den zu $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{\nu^2+b\nu}}{z^{\nu+1}}$ korrespondierenden Kettenbruch zu bestimmen, wo b eine Konstante bedeutet. Aus (39) folgt nämlich für $x = q^b u$

$$\sum q^{\nu^2+\nu b+b} u^{\nu+1} \sim \frac{q^b u}{|1} - \frac{q^{b+1} u}{|1} + \frac{q^{b+1}(1-q^2)u}{|1} - \frac{q^{b+5} u}{|1} + \dots,$$

und hieraus

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{\nu^2+b\nu}}{z^{\nu+1}} \sim \frac{1}{|z} - \frac{q^{b+1}}{|1} + \frac{q^{b+1}(1-q^2)}{|z} - \frac{q^{b+5}}{|1} + \dots.$$

Nun sei

$$a_\nu = q^{\nu^2+b\nu}, \quad q^2 > 1, \quad b \text{ reell.}$$

dann ist die quadratische Form $H(u)$ positiv definit. Ferner ist jetzt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{\nu+1}}{z^\nu} = q \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{\nu^2+(b+2)\nu}}{z^\nu} \sim \frac{q^{2b+4}}{|z} - \frac{q^{b+5}}{|1} + \frac{q^{b+5}(1-q^2)}{|z} - \frac{q^{b+9}}{|1} + \dots$$

also wird in X

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -q^{b+1}, \quad \alpha_3 = q^{b+1}(1-q^2), \quad \alpha_{2\nu} = -q^{4\nu+b-3},$$
$$\alpha_{2\nu+1} = q^{2\nu+b-1}(1-q^2),$$
$$\beta_1 = q^{2b+4}, \quad \beta_2 = -q^{b+5}, \quad \beta_{2\nu} = -q^{4\nu+b+1}, \quad \beta_{2\nu+1} = q^{2\nu+b+3}(1-q^2$$
$$\frac{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2\lambda+1}}{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{2\lambda-1}} = q^{2(b-\lambda)}(q^{2\lambda}-1),$$

---

[30]) Vgl. Perron, a. a. O. [18]), S. 315.
[31]) Vgl. Perron, a. a. O. [18]), S. 375.

d

$$m_n = \prod_{\lambda=1}^{n} q^{2(b-\lambda)}(q^{2\lambda}-1) = q^{2nb-n(n+1)} \prod_{\lambda=1}^{n}(q^{2\lambda}-1).$$

mnach ist für $f(x) = \sum_{\nu=0}^{2n} t_\nu x^\nu \geqq 0$, $q^2 > 1$,

$$\sum_{\nu=0}^{2n} \frac{q^{\nu^2+b\nu}}{\nu!} f^{(\nu)}(x_1) x_0^\nu \geqq \begin{cases} f(x_1) q^{-n^2+n(2b-1)} \prod_{\lambda=1}^{n}(q^{2\lambda}-1) \\ t_{2n} x_0^{2n} q^{(3n+2b-1)n} \prod_{\lambda=1}^{n}(q^{2\lambda}-1) \end{cases},$$

d die Fälle der Gleichheit sind leicht angebbar.

§ 6.

Über Polynome, die für positive x positiv sind.

Ein Hilfssatz über Kettenbrüche. Die Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^{\nu+1}$ sitze den *korrespondierenden* Kettenbruch $\left[\frac{\alpha_\nu x}{1}\right]_1^\infty$, dann ist die Potenzhe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^{2\nu+1}$ *assoziiert* mit dem Kettenbruch $\frac{1}{x}\left[\frac{\alpha_\nu x^2}{1}\right]_1^\infty$, das heißt der Korrespondenz

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^{\nu+1}} \sim \frac{\alpha_1|}{|z} + \frac{\alpha_2|}{|1} + \frac{\alpha_3|}{|z} + \cdots$$

gt, daß die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^{2\nu+1}}$ assoziiert ist mit dem Kettenbruch

$$\frac{\alpha_1|}{|z} + \frac{\alpha_2|}{|z} + \frac{\alpha_3|}{|z} + \cdots.$$

nämlich $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ der Näherungsbruch n-ter Ordnung des Kettenbruches $\left[\frac{\alpha_\nu x}{1}\right]_1^\infty$: so stimmt im Sinne der Korrespondenz die Taylorsche Reihe $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ bis zur Potenz x^n einschließlich mit der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^{\nu+1}$ rein. Nun ist der Näherungsbruch n-ter Ordnung des Kettenbruches $\left[\frac{\alpha_\nu x^2}{1}\right]_1^\infty$: $\frac{1}{x}\frac{P_n(x^2)}{Q_n(x^2)}$, und seine Taylorsche Reihe stimmt offenbar bis zur

Potenz x^{2n} einschließlich mit der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^{2\nu+1}$ überein. Hier durch ist aber der assoziierte Kettenbruch eindeutig bestimmt.

Nun sei

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2, \alpha_3, \ldots \text{ negativ},$$

dann ist die mit den Koeffizienten

$$a_0, 0, a_1, 0, \ldots, a_n$$

gebildete rekurrierende Form positiv definit; dies ist — wie man leicht sieht — gleichbedeutend damit, daß die quadratischen Formen

$$\Sigma a_{\nu+\mu} x_\nu x_\mu \quad \text{und} \quad \Sigma a_{\nu+\mu+1} x_\nu x_\mu$$

positiv definit sind.

Aus den Sätzen IV′, V′ und X folgt nun

XIV.
$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{(2\nu)!} f^{(2\nu)}(x_1) x_0^{2\nu} \geqq \begin{cases} f(x_1) : \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \dfrac{B_\nu(0)^2}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\nu+1}} \\ (-1)^n t_{2n} x_0^{2n} \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n+1} \end{cases},$$

Gleichheit gilt[32]) *hier nur für*

$$f(x) = c \left(\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{B_\nu(0) B_\nu\left(\frac{x-x_1}{x_0}\right)}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\nu+1}} \right)^2$$

bzw. für

$$f(x) = c \left[B_n\left(\frac{x-x_1}{x_0}\right) \right]^2, \qquad x_0 \neq 0, \; c > 0;$$

$B_\nu(z)$ *ist der Näherungsmesser* ν*-ter Ordnung des Kettenbruches* $\left[\frac{\alpha_\nu}{z}\right]_1^\infty$.

Nun sei

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \tau_\nu x^\nu \geqq 0 \quad \text{für } x > 0,$$

dann ist offenbar

$$\varphi(x^2) = f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \tau_\nu x^{2\nu} \geqq 0 \quad \text{für alle } x,$$

also nach XIV speziell für $x_1 = 0$

(40)
$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \tau_\nu x_0^{2n} \geqq \begin{cases} \tau_0 : \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \dfrac{B_\nu(0)^2}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\nu+1}}, \\ (-1)^n \tau_n x_0^{2n} \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n+1}. \end{cases}$$

[32]) Abgesehen von gewissen bei $x_0 = 0$ bestehenden trivialen Fällen.

rner ist leicht zu sehen, daß das Polynom $B_n(x)$ entweder nur gerade er nur ungerade Potenzen von x enthält, also in $B_n(x)^2$ kommen nur rade Potenzen von x vor, somit ist $B_n(\sqrt{x})$ ein Polynom n-ten Grades d

$$B_n(\sqrt{x}) \geqq 0 \quad \text{für } x > 0.$$

ch XIV gilt also in der zweiten Ungleichung von (40) Gleichheit, wenn

$$\varphi(x) = c\left[B_n\left(\sqrt{\frac{x}{x_0}}\right)\right]^2$$

. Wir erhalten so den

Satz XV. *Die quadratischen Formen*

$$\sum_{\nu,\mu \leqq n} a_{\nu+\mu}\, x_\nu\, x_\mu, \qquad \sum_{\nu,\mu \leqq n} a_{\nu+\mu+1}\, x_\nu\, x_\mu$$

ien positiv definit, das heißt in der Kettenbruchentwicklung

1) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^{2\nu+1}} \sim \frac{\alpha_1|}{|z} + \frac{\alpha_2|}{|z} + \frac{\alpha_3|}{|z} + \cdots$$

i $\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 < 0,\ \alpha_3 < 0,\ \ldots,\ \alpha_n < 0$. *Ferner sei* $\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \tau_\nu x^\nu \geqq 0$ *r* $x > 0$. *Dann ist*

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \tau_\nu \xi^\nu \geqq (-1)^n \tau_n \xi^n \alpha_1\, \alpha_2 \ldots, \alpha_{n+1} \qquad \xi > 0.$$

leichheit gilt nur für

$$\varphi(x) = c\left[B_n\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{\xi}}\right)\right]^2,$$

bei $B_\nu(z)$ *der Näherungsnenner* ν*-ter Ordnung des Kettenbruches* (41) *ist.*

Beispiele. 1. Es sei

$$a_\nu = \frac{\Gamma(\alpha+\nu)}{\Gamma(\alpha)}, \qquad \alpha > 0;$$

s der Entwicklung (27) findet man leicht

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^{\nu+1}} \sim \frac{1|}{|z} - \frac{\alpha|}{|1} - \frac{1|}{|z} - \frac{\alpha+1|}{|1} - \frac{2|}{|z} - \cdots,$$

d man erhält

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{\nu=0}^{n} \Gamma(\alpha+\nu)\tau_\nu \xi^\nu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} \varphi(x\xi)\, dx$$

$$\geqq \begin{cases} m!\, \xi^n \tau_n \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1), & n=2m \\ (m-1)!\, \xi^n \tau_n \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1), & n=2m-1 \end{cases}.$$

Für $\alpha = 1$ wird

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu!\, \tau_\nu \xi^\nu \geqq \begin{cases} m!\,(m-1)!\,\tau_n \xi^n, & n = 2m-1, \\ (m!)^2 \tau_n \xi^n, & n = 2m. \end{cases}$$

Die Fälle der Gleichheit in diesen Formeln lassen sich leicht angeben.

Setzt man $\alpha = \frac{1}{2}$ und wendet XIV an, so folgt

$$1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2\nu-1}{2} f^{(2\nu)}(x_1) \frac{x_0^{2\nu}}{(2\nu)!}$$

$$\geqq \begin{cases} m!\, x_0^{2n} t_{2n} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2m-1}{2} & \text{für } n = 2m, \\ (m-1)!\, x_0^{2n} t_{2n} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2m-1}{2} & \text{für } n = 2m-1, \end{cases}$$

oder für $x_0^2 = 4\xi$, $\xi > 0$:

$$1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f^{(2\nu)}(x_1)}{\nu!} \xi^\nu \geqq \begin{cases} m!\, \xi^n 2^{3m} \cdot 1 \cdot 3 \ldots (2m-1) t_{2n}, & n = 2m, \\ (m-1)!\, \xi^n 2^{3m} \cdot 1 \cdot 3 \ldots (2m-1) t_{2n}, & n = 2m-1. \end{cases}$$

Die darin enthaltene Ungleichung: $\sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(2\nu)}(x)}{\nu!} > 0$ hat schon Hurwitz bewiesen (a. a. O. [2]).

2. Man kann offenbar, wie in (35)

$$a_0 = 1, \quad a_\nu = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+\nu-1)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

setzen, wenn nur z. B. $\gamma > \alpha > 0$ ist.

Speziell für $\alpha = r$, $\gamma = 1 + r$, $r > 0$, erhält man

$$r \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\tau_\nu}{\nu + r} \xi^\nu = r \int_0^1 t^{r-1} \varphi(t\xi)\, dt \geqq \frac{\tau_n \xi^n}{2n+r} \left(\frac{n!}{(n+r)(n+r+1)\ldots(2n+r-1)} \right)^2$$

auch hier ist der Fall der Gleichheit leicht angebbar.

3. Bekanntlich ist

$$\sqrt{1+4ax} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{1/2}{\nu} 4^\nu a^\nu x^\nu \sim 1 + \frac{2ax|}{|1} + \frac{ax|}{|1} + \frac{ax|}{|1} + \ldots,$$

also

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{1/2}{\nu} \frac{2^{2\nu-1} a^{\nu-1}}{z^\nu} \sim \frac{1|}{|z} + \frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|z} + \frac{a|}{|1} + \ldots.$$

Nun sei

$$a_\nu = \binom{1/2}{\nu+1} 2^{2\nu+1} a^\nu, \quad a < 0;$$

etzt ist

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_\nu = a \qquad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

nd man erhält

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{1/2}{\nu+1} 2^{2\nu+1} a^\nu \xi^\nu \tau_\nu \geqq (-1)^n a^n \xi^n \tau_n, \quad \xi > 0,$$

der

$$\boxed{\sum_{\nu=0}^{n} \binom{1/2}{\nu+1} \tau_\nu \zeta^\nu \geqq \frac{1}{8} \tau_n |\zeta|^n}, \quad \zeta < 0.$$

Der Gleichheitsfall läßt sich leicht angeben.

(Eingegangen am 7. April 1920.)

Über die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Maßbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Maßbestimmung.

Von

J. A. Schouten in Delft.

§ 1.

Einleitung.

Bekanntlich läßt sich jede n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit quadratischer Maßbestimmung für $n = 2$ konform auf eine euklidische abbilden. E. Cotton hat 1896 die notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufgestellt für $n = 3$ [1]). A. Finzi hat 1903 die geometrische Bedeutung der Cottonschen Bedingungen angegeben für den Fall, daß die Mannigfaltigkeit in einer vierdimensionalen euklidischen untergebracht werden kann [2]). Ricci hat 1910 eine andere notwendige und hinreichende Bedingung aufgestellt für $n = 3$. H. Weyl hat 1918 eine notwendige Bedingung aufgestellt für $n > 3$ [3]). In den folgenden Seiten soll die notwendige und hinreichende Bedingung für $n > 3$ abgeleitet werden. Im Anschluß daran ergeben sich einige Sätze über n-fache Orthogonalsysteme und über V_{n-1} mit lauter Nabelpunkten in einer konformeuklidischen V_n sowie die Bedingung für eine V_n, die in einer euklidischen V_{n+1} liegt.

In den ersten Paragraphen ist der verwendete Rechenapparat möglichst kurz dargestellt [4]).

---

[1]) Sur une généralisation du problème de la représentation conforme aux variétés à trois dimensions, Comptes Rendus **125** (1896), S. 225–228; Sur la représentation conforme des variétés à trois dimensions, Comptes Rendus **127** (1898), S. 349–351; Sur les variétés à trois dimensions, Ann. de Toulouse **1** (1899), S. 385–438.

[2]) Le ipersuperficie a tre dimensioni che si possono rappresentare conformemente sullo spazio euclideo, Atti. d. Veneto **62**, 2 (1903), S. 1049–1062.

[3]) Reine Infinitesimalgeometrie, Math. Zeitschr. **2** (1918), S. 384–411.

[4]) Für $n = 4$ ist die Methode dargestellt in der Arbeit: Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie, Verh. der Kon. Akad. v. Wetensch. **12** (1918), S. 61–95, hier zitiert als A. R. Die Beziehungen zu anderen Methoden sind dort ausführlich behandelt und werden deshalb hier nicht mehr erörtert.

§ 2.

Das Linienelement.

Die ∞^n Werte von n unabhängigen Variablen, die *Urvariablen* $\lambda = a_1, \ldots, a_n$, bestimmen eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit V_n. V_k deute stets eine beliebige k-dimensionale Mannigfaltigkeit, R_k eine solche t euklidischer Maßbestimmung. Jede Funktion der x^λ wird in dem rachteten Gebiete als stetig und hinreichend oft differenzierbar voraus- etzt. Die Gleichungen

$$x^\lambda = c^\lambda$$

timmen bei festen c einen *Punkt* und bei veränderlichen c Scharen V_{n-1}, die sich in den *Parameterlinien* der Urvariablen x^λ, welche *Kongruenzen* von ∞^{n-1} Kurven bilden, schneiden. Die Inkremente dx^λ timmen ein *Linienelement*. Werden n neue unabhängige Urvariablen Funktionen der x^λ eingeführt, so transformieren sich die dx^λ bekanntlich ear homogen. Das Linienelement kann also als kontravarianter Vektor fgefaßt werden[5]). Wenn wir Vektoren durch fetten Druck angeben, kontra- rianten Vektoren ein Komma oben links geben, und für die zu den stimmungszahlen dx^λ gehörigen Maßvektoren die Zeichen $\mathbf{e}'_\lambda$ einführen, ist also das Linienelement:

$$d\mathbf{x}' = \sum dx^\lambda \mathbf{e}'_\lambda = dx^\lambda \mathbf{e}'_\lambda \text{ [6])}.$$

Allgemein ist ein kontravarianter Vektor

$$\mathbf{v}' = v^\lambda \mathbf{e}'_\lambda$$

e Größe zu einem bestimmten Punkte der V_n gehörig, dessen Bestim- ungszahlen v^λ sich beim Übergang zu neuen Urvariablen transformieren e die dx^λ. Die $\mathbf{e}'_\lambda$ transformieren sich offenbar kontragredient zu den dx^λ.

§ 3.

Kontravariante Affinoren.

Ein kontravarianter Affinor p-ten Grades $\overset{p}{\mathbf{v}}'$ ist eine Größe, dessen Bestimmungszahlen $v^{\lambda_1 \cdots \lambda_p}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p = a_1, \ldots, a_n$ sich transformieren e die n^p Produkte der Bestimmungszahlen von p *verschiedenen* Vek-

[5]) Es liegt kein sachlicher, sondern nur ein historischer Grund vor, das Linien- ment gerade kontravariant zu nennen.

[6]) Über *griechische* Indizes, die in einem Formelgliede doppelt auftreten, soll ts summiert werden, auch wenn das Summenzeichen fortgelassen wird. Für *einische* Indizes, die hier stets nur für orthogonale Bestimmungszahlen gebraucht rden, verwenden wir dagegen, wenn summiert werden soll, stets das Summen- chen.

toren $\mathfrak{v}_1', \ldots, \mathfrak{v}_p'$. Lassen sich diese p Vektoren zufällig so wählen, daß allgemein

$$v^{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = v_1^{\lambda_1} \ldots v_p^{\lambda_p}, \tag{4}$$

so heißt $\overset{p}{\mathfrak{v}}'$ das *allgemeine Produkt* von $\mathfrak{v}_1', \ldots, \mathfrak{v}_p'$ in dieser Reihenfolge und wird geschrieben:

$$\overset{p}{\mathfrak{v}}' = \mathfrak{v}_1' \circ \mathfrak{v}_2' \circ \ldots \circ \mathfrak{v}_p' = \mathfrak{v}_1' \ldots \mathfrak{v}_p'. \tag{5}$$

Im allgemeinen läßt sich ein Affinor p-ten Grades *nicht* als das allgemeine Produkt von p Vektoren schreiben, wohl aber als Summe solcher Produkte. Einer in der Clebsch-Aronholdschen Invariantensymbolik üblichen Methode folgend, kann man aber (4) auffassen als die Definitionsgleichung der Produkte der *idealen* Bestimmungszahlen von p *idealen Vektoren* $\mathfrak{v}_1', \ldots, \mathfrak{v}_p'$. Mit diesen idealen Vektoren läßt sich genau so rechnen wie mit gewöhnlichen Vektoren, nur hat man zur Erlangung der realen Bedeutung der Endgleichungen auf (4) oder (5) zurückzugreifen.

Werden $\mathfrak{v}_1', \ldots, \mathfrak{v}_p'$ in irgendeiner anderen Reihenfolge allgemein miteinander multipliziert, so entsteht ein *Isomer* von $\overset{p}{\mathfrak{v}}'$, und zwar ein *gerades* oder *ungerades* Isomer, je nachdem die Permutation gerade oder ungerade ist. Die Isomere von $\overset{p}{\mathfrak{v}}'$ haben alle dieselben Bestimmungszahlen als $\overset{p}{\mathfrak{v}}'$, nur ihre Reihenfolge ist eine andere. Bleibt $\overset{p}{\mathfrak{v}}'$ ungeändert, wenn zwei beliebige ideale Vektoren vertauscht werden, so heißt $\overset{p}{\mathfrak{v}}'$ eine *symmetrische Größe* oder ein *Tensor*. Ebenso heißt $\overset{p}{\mathfrak{v}}'$ eine *alternierende Größe* oder ein *p-Vektor*, wenn bei Vertauschung zweier beliebiger idealer Vektoren Vorzeichenwechsel auftritt.

Die Summe sämtlicher $p!$ Isomere von $\overset{p}{\mathfrak{v}}'$ dividiert durch $p!$ ist ein Tensor und heißt das *symmetrische Produkt* von $\mathfrak{v}_1', \ldots, \mathfrak{v}_p'$: $\mathfrak{v}_1' \smile \mathfrak{v}_2' \smile \ldots \smile \mathfrak{v}_p'$ oder kurz $\mathfrak{v}_1' \ldots \mathfrak{v}_p'$. Ebenso ist die Summe sämtlicher gerader Isomere vermindert mit der Summe sämtlicher ungerader Isomere und dividiert durch $p!$ ein p-Vektor und heißt das *alternierende Produkt* von $\mathfrak{v}_1', \ldots, \mathfrak{v}_p'$: $\mathfrak{v}_1' \frown \mathfrak{v}_2' \frown \ldots \frown \mathfrak{v}_p'$ oder kurz $\mathfrak{v}_1' \ldots \mathfrak{v}_p'$. Das alternierende Produkt wird Null für $p > n$.

Zur Unterscheidung schreiben wir einen Tensor p-ten Grades ${}^p\mathfrak{v}'$ und einen p-Vektor ${}_p\mathfrak{v}'$. Sowohl Tensoren als p-Vektoren lassen sich als Potenz *eines einzigen* idealen Vektors schreiben:

$${}^p\mathfrak{v}' = \mathfrak{v}'^p; \quad {}_p\mathfrak{w}' = \mathfrak{w}'^p. \tag{6}$$

Ein p-Vektor, der sich als alternierendes Produkt von p Vektoren schreiben läßt, heißt *einfacher p-Vektor*. Jeder p-Vektor ist eine Summe von einfachen p-Vektoren.

Tritt eine Größe $\overset{p}{\mathfrak{v}}$ in einem Produkt m mal auf, so dürfen die idealen ıktoren der m-Faktoren nicht verwechselt werden, da sonst Zweideutig-it entsteht. Es sind also m gleichberechtigte Sätze von p idealen Vek-ren, ${}^1\mathfrak{v}_1, \ldots, {}^1\mathfrak{v}_p$; ${}^2\mathfrak{v}_1, \ldots, {}^2\mathfrak{v}_p$; $\ldots$ ${}^m\mathfrak{v}_1, \ldots, {}^m\mathfrak{v}_p$ einzuführen. Ein ähn-cher Sachverhalt liegt bekanntlich in der Clebsch-Aronholdschen variantensymbolik vor.

§ 4.

Kovariante Vektoren und Affinoren.

Eine Größe mit n Bestimmungszahlen v_λ, $\lambda = a_1, \ldots, a_n$, die sich bei ansformationen der Urvariablen kontragredient zu den dx^λ transformieren, ißt ein *kovarianter Vektor*. Für die zu den Bestimmungszahlen ge-rigen Maßvektoren führen wir die Zeichen $\mathfrak{e}_\lambda$ ein:

$$\mathfrak{v} = v_\lambda \mathfrak{e}_\lambda .$$

e $\mathfrak{e}_\lambda$ transformieren sich kontragredient zu den v_λ und $\mathfrak{e}'_\lambda$ und folglich gredient zu den dx^λ. Kovariante Vektoren können z. B. in folgender eise aus den kontravarianten abgeleitet werden. Der kontravariante Vektor

$$ {}_n\mathfrak{E}' = \mathfrak{e}'_{a_1} \overset{\frown}{\ldots} \mathfrak{e}'_{a_n}$$

t eine einzige Bestimmungszahl, die bei Transformation der x^λ durch e Determinante der Transformation dividiert wird. Wird ein beliebiger Vektor ${}_n\mathfrak{P}'$ fest als Maß-n-Vektor gewählt[7]), und ist Q' die Bestimmungs-hl von ${}_n\mathfrak{E}'$ in bezug auf diesen Maßvektor:

$$ {}_n\mathfrak{E}' = Q' {}_n\mathfrak{P}',$$

transformieren sich die n Größen

$$\mathfrak{e}_{a_1} = \frac{\mathfrak{e}'_{a_2} \overset{\frown}{\ldots} \mathfrak{e}'_{a_n}}{Q'}, \quad \mathfrak{e}_{a_2} = -\frac{\mathfrak{e}'_{a_1}\mathfrak{e}'_{a_3} \overset{\frown}{\ldots} \mathfrak{e}'_{a_n}}{Q'}, \ldots, \quad \mathfrak{e}_{a_n} = (-1)^{n-1} \frac{\mathfrak{e}'_{a_1} \overset{\frown}{\ldots} \mathfrak{e}'_{a_{n-1}}}{Q'}$$

gredient zu den dx^λ, und diese Größen sind also Maßvektoren kovarianter ktoren. Die Maßvektoren können auch bloß durch Definition ihrer ansformationsweise eingeführt werden. Wir nehmen nun im folgenden , es sei in bezug auf irgendeinen Satz $\mathfrak{e}'_\lambda$ in jedem Punkte der V_n ein tz $\mathfrak{e}_\lambda$ in irgendeiner Weise definiert. Der mit jedem anderen Satz ntravarianter Maßvektoren korrespondierende kovariante Satz ist dann rch die Transformationsweise bestimmt.

Alles für kontravariante Vektoren Gesagte gilt m. m. auch für ko-riante. Es lassen sich auch, genau wie im § 3, kovariante Affinoren,

[7]) Es ist zu beachten, daß dies geschehen kann ohne Einführung einer „Maß-stimmung“ im gewöhnlichen Sinne.

Tensoren und p-Vektoren definieren. Alle kovariante Größen seien durch *fetten Druck ohne Komma* gekennzeichnet.

Alle ko- und kontravariante Größen sind unabhängig von der Wahl der Urvariablen.

§ 5.

Gemischte Affinoren.

Ein *gemischter Affinor p-ten Grades* ist eine Größe, dessen n^p Bestimmungszahlen sich transformieren wie die n^p Produkte der Bestimmungszahlen von p *verschiedenen* Vektoren, von denen einige kovariant, andere kontravariant sind. Jeder gemischte Affinor läßt sich als allgemeines Produkt von idealen ko- und kontravarianten Vektoren schreiben und erhält oben rechts einen aus · und , zusammengestellten Index, der die Art der idealen Faktoren angibt, z. B.:

$$\mathfrak{v}^{\cdot,\cdot,\cdot} = \mathfrak{v}_1 \mathfrak{v}_2' \mathfrak{v}_3' \mathfrak{v}_4. \tag{11}$$

Sind die Bestimmungszahlen zweier Größen in bezug auf dieselben Maßvektoren proportional, so sind die Größen *gleicher Orientierung*.

§ 6.

Die Überschiebungen.

Die Größe

$$v_\lambda w^\lambda \tag{12}$$

ist unabhängig von der Wahl der Urvariablen und heißt die *erste Überschiebung* der Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}'$. Die erste Überschiebung genügt dem distributiven Gesetze und ist also ein Produkt[8]). Als Multiplikationszeichen führen wir ¹ ein:

$$\mathfrak{v}^1 \mathfrak{w}' = \mathfrak{w}'^1 \mathfrak{v} = v_\lambda w^\lambda. \tag{13}$$

Allgemein definieren wir die i-te Überschiebung von $\overset{p}{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v}_1 \dots \mathfrak{v}_p$ und $\overset{q}{\mathfrak{w}'} = \mathfrak{w}_1' \dots \mathfrak{w}_q'$:

$$\overset{p}{\mathfrak{v}}{}^i \overset{q}{\mathfrak{w}'} = (\mathfrak{v}_p{}^1 \mathfrak{w}_1')(\mathfrak{v}_{p-1}{}^1 \mathfrak{w}_2') \dots (\mathfrak{v}_{p-i+1}{}^1 \mathfrak{w}_i') \mathfrak{v}_1 \dots \mathfrak{v}_{p-i} \mathfrak{w}_{i+1}' \dots \mathfrak{w}_q'. \tag{14}$$

Insbesondere ist:

$$\mathfrak{e}_\lambda{}^1 \mathfrak{e}_\mu' = \mathfrak{e}_\mu'{}^1 \mathfrak{e}_\lambda = \begin{cases} 1 \text{ für } \lambda = \mu \text{ (nicht summieren)} \\ 0 \text{ „ } \lambda \neq \mu. \end{cases} \tag{15}$$

[8]) Es kann gezeigt werden, daß alle Simultankovarianten von Größen mit Hilfe der Multiplikationen $\circ, \smile, \frown$ und ¹ aus den idealen Faktoren dieser Größen gebildet werden können. Dieser Satz, dem die idealen Vektoren ihre Bedeutung verdanken, entspricht dem ersten Fundamentalsatze der Invariantensymbolik.

derselben Weise können Überschiebungen gemischter Affinoren gebildet erden, z. B.:

6) $$\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2\mathfrak{v}_3' \overset{2}{:} \mathfrak{w}_1\mathfrak{w}_2'\mathfrak{w}_3' = (\mathfrak{v}_3' \overset{1}{:} \mathfrak{w}_1)(\mathfrak{v}_2 \overset{1}{:} \mathfrak{w}_2')\,\mathfrak{v}_1\mathfrak{w}_3'.$$

uch können Überschiebungen nach anderen Faktoren gebildet werden. iese bekommen kein besonderes Zeichen.

Die Größe

7) $$_p\mathfrak{v} \overset{i}{\urcorner} \overset{q}{\mathfrak{w}} = (_p\mathfrak{v}\mathfrak{w}_1 \overset{\frown}{\cdots} \mathfrak{w}_i)\,\mathfrak{w}_{i+1} \cdots \mathfrak{w}_q, \qquad p + i \leqq n$$

ennen wir die *i-te vektorische Überschiebung* des p-Vektors $_p\mathfrak{v}$ mit dem ffinor $\overset{q}{\mathfrak{w}}$.

Besondere Bedeutung für die vorliegende Untersuchung hat die *doppelte ktorische Überschiebung* zweier Größen zweiten Grades:

8) $$\overset{2}{\mathfrak{v}} \overset{2}{\asymp} \overset{2}{\mathfrak{w}} = (\mathfrak{v}_1 \frown \mathfrak{w}_1)(\mathfrak{v}_2 \frown \mathfrak{w}_2).$$

Diese beiden letzten Überschiebungen genügen ebenfalls dem distriutiven Gesetze und sind also Produkte.

§ 7.

Der Fundamentaltensor.

Zwei zu demselben Punkte von V_n gehörige gleichartige Vektoren erschiedener Richtung sind bis hier der Größe nach unvergleichbar, und uch der von zwei Linienelementen eingeschlossene Winkel kann noch nicht emessen werden.

Wir wählen nun einen beliebigen kontravarianten Tensor zweiten rades mit nicht verschwindender Diskriminante

9) $$^2\mathfrak{g}' = g^{\lambda\mu}\,\mathfrak{e}_\lambda'\,\mathfrak{e}_\mu'; \quad |g^{\lambda\mu}| = \frac{1}{g} \neq 0$$

nd nennen diesen den *kontravarianten Fundamentaltensor*. Sind $g_{\lambda\mu}$ die inoren der Elemente von $g^{\lambda\mu}$ dividiert durch $\frac{1}{g}$, so transformieren sich iese Größen bekanntlich kontragredient zu den $g^{\lambda\mu}$. Gleichzeitig mit $^2\mathfrak{g}'$, t also auch der kovariante Tensor zweiter Ordnung

10) $$^2\mathfrak{g} = g_{\lambda\mu}\,\mathfrak{e}_\lambda\mathfrak{e}_{\mu'}.$$

er *kovariante Fundamentaltensor*, festgelegt.

Die gemischten Affinoren

11) $$\overset{2}{\mathfrak{g}}'' = {}^2\mathfrak{g} \overset{1}{:} {}^2\mathfrak{g}' = \mathfrak{e}_\lambda\,\mathfrak{e}_\lambda', \qquad \overset{2}{\mathfrak{g}}'' = {}^2\mathfrak{g}' \overset{1}{:} {}^2\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_\lambda'\,\mathfrak{e}_\lambda$$

nd von den Fundamentaltensoren unabhängig. Sie heißen *Einheitsfinoren*. Für beliebige Größen $\overset{p}{\mathfrak{v}}$ und $\overset{q}{\mathfrak{w}}'$ gilt stets

$$\begin{aligned} {}^{2}\mathfrak{g}'\,{}^{1}_{\cdot}\,{}^{p}\mathfrak{v} &= {}^{p}\mathfrak{v}, \\ {}^{2}\mathfrak{g}'\,{}^{1}_{\cdot}\,{}^{q}\mathfrak{w}' &= {}^{q}\mathfrak{w}'. \end{aligned} \tag{22}$$

Als *skalares Produkt* zweier ko- bzw. kontravarianten Vektoren definieren wir die offenbar distributiven Verknüpfungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}\cdot\mathfrak{w} &= \mathfrak{v}\,{}^{1}_{\cdot}\,{}^{2}\mathfrak{g}'\,{}^{1}_{\cdot}\,\mathfrak{w} = g^{\lambda\mu}v_\lambda w_\mu, \\ \mathfrak{v}'\cdot\mathfrak{w}' &= \mathfrak{v}'\,{}^{1}_{\cdot}\,{}^{2}\mathfrak{g}\,{}^{1}_{\cdot}\,\mathfrak{w}' = g_{\lambda\mu}v^\lambda w^\mu, \end{aligned} \tag{23}$$

und als *Modulus* eines ko- bzw. kontravarianten Vektors:

$$v = \sqrt{\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{v}}; \qquad w' = \sqrt{\mathfrak{w}'\cdot\mathfrak{w}'}. \tag{24}$$

Damit ist in der V_n eine Maßbestimmung festgelegt:

$$ds^2 = d\mathfrak{x}'\cdot d\mathfrak{x}' = g_{\lambda\mu}dx^\lambda dx^\mu. \tag{25}$$

In der Umgebung eines Punktes ist V_n bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung eben, also eine R_n. In dieser R_n kann jeder kontravariante Vektor in infinitesimalem Maßstab als Strecke bestimmter Länge und bestimmter Richtung dargestellt werden. Der Modulus hat hier die Bedeutung der Länge. Wer diese dem Physiker geläufige Darstellung aus Gründen mathematischer Strenge lieber vermeidet, kann eine endliche Darstellung erhalten, indem V_n in eine R_{n+k} eingebettet wird, und die R_n verwendet wird, welche V_n in dem betrachteten Punkte tangiert.

Der Winkel, den zwei kontravariante Vektoren einschließen, ist gegeben durch die Gleichung

$$\cos(\mathfrak{v}', \mathfrak{w}') = \frac{\mathfrak{v}'\cdot\mathfrak{w}'}{v'w'}. \tag{26}$$

Ein kontravarianter einfacher p-Vektor entspricht einem Teil einer R_p bestimmten Inhalts, dem ein bestimmter Hyperschraubsinn zugeordnet ist.

Wählt man in jedem Punkte der V_n n beliebige gegenseitig senkrechte kontravariante Einheitsvektoren $\mathfrak{i}_j'$, $j = 1, \ldots, n$, was auf $\infty^{\frac{n(n-1)}{2}}$ verschiedene Weisen geschehen kann, so ist offenbar stets

$${}^{2}\mathfrak{g}' = \mathfrak{i}_j'\,\mathfrak{i}_j'. \tag{27}$$

Ist der Satz $\mathfrak{i}_j'$ gewählt, so gibt es einen und nur einen Satz von kovarianten Einheitsvektoren $\mathfrak{i}_j$, so daß

$${}^{2}\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_j\,\mathfrak{i}_j \tag{28}$$

und gleichzeitig

$$\mathfrak{i}_j\,{}^{1}_{\cdot}\,\mathfrak{i}_k' = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k. \end{cases} \tag{29}$$

Bei Drehungen und Spiegelungen des Satzes $\mathfrak{i}_j'$ transformieren sich

$\mathfrak{i}_j'$ orthogonal und die $\mathfrak{i}_j$ zu den $\mathfrak{i}_j'$ kontragredient. Da aber bekanntlich
r Unterschied zwischen kogredient und kontragredient bei der ortho-
nalen Gruppe verschwindet, transformieren sich die $\mathfrak{i}_j'$ und $\mathfrak{i}_j$ in der-
lben Weise.

§ 8.

Identifizierung von ko- und kontravarianten Größen.

Wir wollen nun zeigen, daß der Unterschied zwischen kovarianten
d kontravarianten Größen gegenstandslos wird, sobald der Fundamen-
ltensor *fest gegeben* ist. Durch die Gleichungen

0) $$\mathfrak{v}' = {}^2\mathfrak{g}'^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{v}; \qquad \mathfrak{w} = {}^2\mathfrak{g}^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{w}'$$

rd nämlich in dem Falle jedem ko- bzw. kontravarianten Vektor ein
nziger kontra- bzw. kovarianter Vektor zugeordnet. Da überdies

1) $$\mathfrak{v} = {}^2\mathfrak{g}^{\frac{1}{2}}\,{}^2\mathfrak{g}'^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{v} = {}^2\mathfrak{g}^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{v}'; \qquad \mathfrak{w}' = {}^2\mathfrak{g}'^{\frac{1}{2}}\,\mathfrak{w},$$

diese Zuordnung eine reziproke und die Korrespondenz ist also ein-
ndeutig.

Ist

2) $$\mathfrak{v} = \sum v_j \mathfrak{i}_j,$$

ist

3) $$\mathfrak{v}' = \sum {}^2\mathfrak{g}'^{\frac{1}{2}}\,v_j\,\mathfrak{i}_j = \sum v_j\,\mathfrak{i}_j'.$$

d die zu $\mathfrak{i}_j$ bzw. $\mathfrak{i}_j'$ gehörigen Bestimmungszahlen zweier korrespondie-
nder Größen sind also gleich. Da aber die $\mathfrak{i}_j$ und die $\mathfrak{i}_j'$ sich in der-
lben Weise transformieren und eine geometrische Größe nach dem Klein-
hen Prinzip durch die Transformationsweise ihrer Bestimmungszahlen
llständig charakterisiert ist, hat es keinen Zweck, zwischen $\mathfrak{i}_j$ und $\mathfrak{i}_j'$ zu
nterscheiden. Ist also ein *bestimmter* Fundamentaltensor gegeben, so
tzen wir

4) $$\mathfrak{i}_j = \mathfrak{i}_j'$$

d damit

5) $$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}', \qquad {}^2\mathfrak{g} = {}^2\mathfrak{g}'.$$

n Vektor $\mathfrak{v}$ hat dann drei Arten Bestimmungszahlen, kovariante, kontra-
riante und orthogonale:

6) $$\mathfrak{v} = v_\lambda \mathfrak{e}_\lambda = v^\lambda \mathfrak{e}_\lambda' = \sum v_j \mathfrak{i}_j.$$

Größen höheren Grades haben nicht nur kovariante, kontravariante
d orthogonale, sondern auch noch gemischte Bestimmungszahlen. Der
ndamentaltensor läßt sich z. B. schreiben:

7) $$^2\mathfrak{g} = g_{\lambda\mu}\,\mathfrak{e}_\lambda\,\mathfrak{e}_\mu = g^{\lambda\mu}\,\mathfrak{e}_\lambda'\,\mathfrak{e}_\mu' = \sum \mathfrak{i}_j\,\mathfrak{i}_j = \mathfrak{e}_\lambda\,\mathfrak{e}_\lambda' = \mathfrak{e}_\lambda'\,\mathfrak{e}_\lambda.$$

Die verschiedenen Bestimmungszahlen einer Größe werden erhalten durch Überschiebung mit Produkten von Maßvektoren, so ist z. B.:

$$\mathbf{e}'_\varkappa \mathbf{e}'_\lambda \mathbf{e}'_\mu \overset{3}{:} \overset{3}{\mathbf{v}} = v_{\mu\lambda\varkappa},$$

$$\mathbf{e}_\varkappa \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_\mu \overset{3}{:} \overset{3}{\mathbf{v}} = v^{\mu\lambda\varkappa}, \tag{38}$$

$$\mathbf{i}_l \mathbf{i}_k \mathbf{i}_j \overset{3}{:} \overset{3}{\mathbf{v}} = v_{jkl}.$$

Die Identifizierung von ko- und kontravarianten Größen ist nur erlaubt, wenn der Fundamentaltensor während der Untersuchung nicht geändert wird. Beim Übergang zu einem anderen Fundamentaltensor stellt sich *während* des Überganges sofort wieder der Unterschied zwischen ko- und kontravarianten Größen ein. Man hat dann für jede vorkommende Größe festzusetzen, ob sie *während* des Überganges als kovariant oder als kontravariant betrachtet werden soll. Bei der neuen Maßbestimmung besteht dann wieder eine bestimmte eineindeutige Korrespondenz, aber eine neue, die durch den neuen Fundamentaltensor bestimmt ist.

Insbesondere interessiert uns hier der Übergang von ${}^2\mathbf{g}'$ zu $\frac{1}{\sigma}{}^2\mathbf{g}'$, wo σ eine Funktion des Ortes ist. Der Winkel zweier Richtungen in einem Punkte ändert sich dabei nicht, und der Übergang entspricht also einer konformen Transformation der V_n. Die Einheitsvektoren ändern sich aber:

$$'{}^2\mathbf{g} = \sigma\, {}^2\mathbf{g}, \qquad '{}^2\mathbf{g}' = \frac{1}{\sigma}{}^2\mathbf{g}', \tag{39}$$

$$'\mathbf{i}_j = \sigma^{\frac{1}{2}} \mathbf{i}_j, \qquad '\mathbf{i}'_j = \sigma^{-\frac{1}{2}} \mathbf{i}'_j. \tag{40}$$

§ 9.

Die Vektoralgebra der p-Vektoren.

Ist die Identifizierung von $\mathbf{i}$ und $\mathbf{i}'$ erfolgt, so besteht für die p-Vektoren, $p = 1, \ldots, n$, eine Vektoralgebra (das System R_n^0), die nur diese Größen und keine andere enthält und an anderer Stelle dargestellt ist[9]). Wird dieses System aus der zugrunde liegenden orthogonalen Gruppe abgeleitet, so ergibt sich für das skalare Produkt:

$$\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_j = \varkappa = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}. \tag{41}$$

Das System ist geschlossen, d. h. es enthält eine endliche Anzahl linear unabhängiger Größen. Die Geschlossenheit ist eine Folge der

[9]) Over de directe analyse der lineaire grootheden bij de rotationeele groep in drie en vier grondvariabelen, Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. **26** (1917), S. 566—580; englisch: Proceedings **21** (1917), S. 327—341; Über die Zahlensysteme der geometrischen Größen, Nieuw Archief voor Wiskunde **13** (1920), S. 141—156, 249—266.

tifizierung von alternierenden Größen verschiedenen Grades, und diese tifizierung gründet sich auf die bei der orthogonalen Gruppe existieen Dualitäten, z. B. die zwischen p-Vektoren und $(n-p)$-Vektoren. Bedeutung des Faktors $\varkappa$ liegt nun darin, daß die Dualitäten nur obiger Wahl von $\varkappa$ zum Ausdruck kommen und infolgedessen nur bei er Wahl eine einfache Regel existiert, die *Überschiebungsregel*, die es öglicht, sämtliche Produktbildungen ohne Tabellen und ohne Gedächtnisit anzuschreiben.

Wollte man an dieses System anschließen, so wäre in Gleichung (13) etzen:

$$\mathfrak{v}\,\dot{1}\,\mathfrak{w}' = \mathfrak{w}'\,\dot{1}\,\mathfrak{v} = \varkappa\, v_\lambda\, w^\lambda$$

Bei differentialgeometrischen Untersuchungen sind nun aber die Identirungen niemals nötig, da außer p-Vektoren sofort auch allgemeine ioren auftreten. p-Vektoren werden überdies weit mehr mit diesen mit anderen p-Vektoren verknüpft. Der besondere von n abhängige t von $\varkappa$, der in dem System R_n^0 der einzig zweckmäßige ist, gibt indessen hier nur eine unnütze Erschwerung der Rechnung. Demgemäß ier $\varkappa$ durch $+1$ ersetzt, wodurch eine bedeutende Vereinfachung er- wird [10]).

§ 10.

Die idealen Faktoren des Fundamentaltensors.

Schreiben wir ${}^2\mathfrak{g}'$ als Potenz der gleichberechtigten idealen Vektoren $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, ...:

$${}^2\mathfrak{g}' = \mathfrak{a}'\,\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}'\,\mathfrak{b}' = \ldots,$$

ilt für die Bestimmungszahlen dieser Vektoren:

$$g^{\lambda\mu} = a^\lambda a^\mu = b^\lambda b^\mu = \ldots$$
$$1 = a'_j\, a'_j = b'_j\, b'_j = \ldots$$
$$0 = a'_j\, a'_k = b'_j\, b'_k = \ldots,\quad j \neq k.$$

eiben wir

$${}^2\mathfrak{g}\,\dot{1}\,\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}, \qquad {}^2\mathfrak{g}\,\dot{1}\,\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}, \ldots,$$

st infolge (15), (19) und (20):

$${}^2\mathfrak{g} = {}^2\mathfrak{g}\,\dot{1}\,{}^2\mathfrak{g}'\,\dot{1}\,{}^2\mathfrak{g},$$

[10]) Für $n=4$, der in A. R. behandelte Fall, macht dies keinen Unterschied, da $\varkappa = +1$. In der Untersuchung über n-fache Orthogonalsysteme, Versl. Kon. l. d. Wetensch. 28 (1919) S. 202—212, 452—463, englisch: Proceedings 22 (1919) 6—605, 684—695, ist aber überall noch $\varkappa$ verwendet. Man kann in dieser it überall $\varkappa$ durch $+1$ ersetzen.

und für $^2\mathbf{g}$ gilt also:

$$^2\mathbf{g} = \mathbf{a}\,\mathbf{a} = \mathbf{b}\,\mathbf{b} = \dots \tag{47}$$

Für die Bestimmungszahlen von $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$ gilt:

$$\begin{gathered} g_{\lambda\mu} = a_\lambda a_\mu = b_\lambda b_\mu = \dots \\ a_\lambda a^\mu = b_\lambda b^\mu = \dots = \begin{cases} 1 \text{ für } \lambda = \mu \text{ (nicht summieren)}, \\ 0 \text{ für } \lambda \neq \mu, \end{cases} \\ 1 = a_j a_j = b_j b_j = \dots \\ 0 = a_j a_k = b_j b_k = \dots, \quad j \neq k. \end{gathered} \tag{48}$$

Da ferner

$$\overset{2}{\mathbf{g}}{}'' = {}^2\mathbf{g}\,\overset{1}{:}\,{}^2\mathbf{g}' = \mathbf{a}\,\mathbf{a}', \qquad \overset{2}{\mathbf{g}}{}'' = {}^2\mathbf{g}'\,\overset{1}{:}\,{}^2\mathbf{g} = \mathbf{a}'\,\mathbf{a}, \tag{49}$$

gilt für jeden ko- bzw. kontravarianten Vektor die wichtige Formel:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{a}\,(\mathbf{a}'\,\overset{1}{:}\,\mathbf{v}), \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{a}'\,(\mathbf{a}\,\overset{1}{:}\,\mathbf{v}'). \end{aligned} \tag{50}$$

Diese Formel ermöglicht es, einen idealen oder realen Faktor eines Produktes an jeder beliebigen Stelle zu bringen, was insbesondere bei Differentiationen sehr nützlich ist. So läßt sich z. B. der i-te Faktor von $\overset{p}{\mathbf{v}}$ ganz nach links schaffen:

$$\overset{p}{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_p = (\mathbf{a}'\,\overset{1}{:}\,\mathbf{v}_i)\,\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_{i-1}\,\mathbf{a}\,\mathbf{v}_{i+1} \dots \mathbf{v}_p. \tag{51}$$

Bei Identifizierung von ko- und kontravarianten Vektoren wird

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}', \qquad \mathbf{b} = \mathbf{b}', \dots$$

$$a_i a_j = b_i b_j = \dots = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \quad ,, \quad i \neq j, \end{cases} \tag{52}$$

und die Formeln vereinfachen sich dementsprechend, z. B.

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}). \tag{53}$$

Jede Größe, die sich, wenn $^2\mathbf{g}'$ gegeben ist, ohne Berücksichtigung eines Bezugssystems vermittels einer einzigen Zahl geben läßt, nennen wir einen *Skalar*. Es sind also z. B. $\overset{2}{\mathbf{g}}{}''$, $^2\mathbf{g}'$, $^2\mathbf{g}$ und $(\mathbf{a} \frown \mathbf{b})\,(\mathbf{a} \frown \mathbf{b})$ Skalare zweiten bzw. vierten Grades.

§ 11.

Die Übertragung der V_n[11].

Ist in einer V_n eine skalare Ortsfunktion p gegeben, so transformieren sich die Ableitungen $\frac{\partial p}{\partial x^\lambda}$ bekanntlich kontragredient zu den $d\,x^\lambda$. Setzt man

[11]) Weyl verwendet neben „Übertragung" auch das Wort „Zusammenhang". Dieses Wort ist in vorliegender Arbeit nicht verwendet, da es zu Verwechslungen mit dem Begriffe des Zusammenhangs der Analysis situs Anlaß geben könnte. Hessenberg spricht von „äußerer Orientierung".

)
$$\nabla = \mathfrak{e}_\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda},$$

ist der räumliche Differentialquotient:

)
$$\nabla p = \mathfrak{e}_\lambda \frac{\partial p}{\partial x^\lambda}$$

kovarianter Vektor, der *Gradient* des Feldes p, während

)
$$d p = d\mathbf{x}' \overset{1}{.} \nabla p.$$

einer R_n ist in derselben Weise:

)
$$\nabla \mathfrak{v} = \mathfrak{e}_\lambda \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x^\lambda},$$
$$d \mathfrak{v} = d\mathbf{x}' \overset{1}{.} \nabla \mathfrak{v}.$$

se Definition beruht darauf, daß die Werte von $\mathfrak{v}$ in zwei benachbarten kten P und Q vergleichbar sind, indem z. B. der Wert in P durch allele Verschiebung nach Q gebracht wird. In einer allgemeinen V_n ein solcher Vergleich ausgeschlossen, da der Begriff parallel hier seine deutung verliert. Die Ausdrücke $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x^\lambda}$, $d\mathfrak{v}$ und $\nabla \mathfrak{v}$ haben also zunächst h gar keine Bedeutung, da in der V_n noch keine *Übertragung* definiert ist.

Man kann nun statt der parallelen Übertragung in jedem Punkte für e Richtung eine ganz beliebige Übertragung definieren, und mit Hilfe ser Übertragung eine Differentiation bestimmen. Werden dabei die Forungen aufgestellt, daß eine übertragene Summe von Vektoren die Summe übertragenen Vektoren ist, und daß die Übertragung in einer beliegen Richtung durch die Übertragungen in n unabhängigen Richtungen der gewöhnlichen Weise linear bestimmt ist, so ist die Übertragung kontra- bzw. kovarianten Vektoren gegeben durch die Gleichungen die Einheiten:

)
$$d\,\mathfrak{e}'_\lambda = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\,\mathfrak{e}'_\nu\,dx^\mu, \quad \nabla\,\mathfrak{e}'_\lambda = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\,\mathfrak{e}'_\nu,$$
$$d\,\mathfrak{e}_\nu = \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}\,\mathfrak{e}_\lambda\,dx^\mu, \quad \nabla\,\mathfrak{e}_\nu = \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}\,\mathfrak{e}_\lambda,$$

raus für beliebige Vektoren folgt:

a)
$$d\mathfrak{v}' = \left(\frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} + v^\lambda \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\right) \mathfrak{e}'_\nu\,dx^\mu, \quad \Delta\mathfrak{v}' = \left(\frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} + v^\lambda \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\right) \mathfrak{e}'_\mu\,\mathfrak{e}'_\nu,$$
$$d\mathfrak{v} = \left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu} + v_\nu \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}\right) \mathfrak{e}_\lambda\,dx^\mu, \quad \Delta\mathfrak{v} = \left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial x^\mu} + v_\nu \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}\right) \mathfrak{e}_\mu\,\mathfrak{e}_\lambda,$$

$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ und $\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}$ sind Parameter, die sich bei nicht linearen Transfortionen der Urvariablen nicht transformieren wie die Bestimmungszahlen

eines Affinors. Stellt man die weitere Forderung[12]) auf, daß $d\overset{2}{\mathbf{g}}$ und damit auch $d\overset{2}{\mathbf{g}}'$ verschwindet, so ergibt sich:

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = -\Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu}. \tag{59}$$

Fügt man die Forderung hinzu, daß die Rotation des Gradienten jedes Skalarfeldes identisch verschwindet, wie dies ja auch bei der gewöhnlichen Differentiation bei einer euklidischen Maßbestimmung der Fall ist:

$$\nabla \frown \nabla p = 0, \tag{60}$$

so ist dazu notwendig und hinreichend, daß für jede Wahl von zwei Verrückungen $d_1\mathbf{x}'$ und $d_2\mathbf{x}'$:

$$d_1\mathbf{x}' d_2\mathbf{x}' : \nabla \frown \nabla p = 0, \tag{61}$$

oder

$$\begin{aligned} 0 &= (d_1\mathbf{x}' d_2\mathbf{x}' - d_2\mathbf{x}' d_1\mathbf{x}') : \nabla\nabla p \\ &= d_1\mathbf{x}' : d_2\nabla p - d_2\mathbf{x}' : d_1\nabla p \\ &= d_2 d_1 p - d_1 d_2 p - (d_2 d_1\mathbf{x}' - d_1 d_2\mathbf{x}') : \nabla p = (d_1 d_2\mathbf{x}' - d_2 d_1\mathbf{x}') : \nabla p \end{aligned} \tag{62}$$

d. h. daß $d_1 d_2\mathbf{x}' - d_2 d_1\mathbf{x}'$ identisch Null ist.

Nun ist

$$d_1 d_2\mathbf{x}' = d_1(\mathbf{e}'_\lambda d x^\lambda) = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\mathbf{e}'_\nu d_1 x^\mu d_2 x^\lambda + \mathbf{e}'_\lambda d_1 d_2 x^\lambda, \tag{63}$$

so daß

$$d_1 d_2\mathbf{x}' - d_2 d_1\mathbf{x}' = (\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda})\mathbf{e}'_\nu d_1 x^\mu d_2 x^\lambda. \tag{64}$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung ist also:

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}. \tag{65}$$

Aus (58a) ergibt sich, daß unter diesen Voraussetzungen $\nabla \frown \mathbf{v}$ von den $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$, also von der Wahl der Übertragung unabhängig ist.

Wir stellen nun noch die weitere Forderung auf, daß auch ${}^2\mathbf{g}'$ eine Konstante ist:

$$0 = d\,{}^2\mathbf{g}' = \mathbf{a}' d\mathbf{a}' + d\mathbf{a}'\,\mathbf{a}' = (a^\nu a^\lambda_\mu + a^\lambda a^\nu_\mu + g^{\nu\varkappa}\Gamma^{\lambda}_{\varkappa\mu} + g^{\lambda\varkappa}\Gamma^{\nu}_{\varkappa\mu})\mathbf{e}'_\nu \mathbf{e}'_\lambda d \tag{66}$$

Dann ergibt sich:

$$g^{\nu\varkappa}\Gamma^{\lambda}_{\varkappa\mu} + g^{\lambda\varkappa}\Gamma^{\nu}_{\varkappa\mu} = -a^\nu a^\lambda_\mu - a^\lambda a^\nu_\mu = -\frac{\partial g^{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}, \tag{67}$$

oder:

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\varkappa}\left(\frac{\partial g_{\mu\varkappa}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\varkappa}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\varkappa}\right) = \left\{\begin{matrix}\lambda\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}. \tag{68}$$

[12]) Man kann andere Forderungen aufstellen und es ergeben sich dann andere Arten des Zusammenhangs und andere Differentiationen, von denen einige von Hessenberg, Weyl und König behandelt sind. Eine eingehende Behandlung dieses Gegenstandes wird an anderer Stelle erfolgen.

s berechnet sich leicht, daß auch $d^2\mathbf{g}$ verschwindet. Man kann der echnung nun in folgender Weise eine bemerkenswerte Einfachheit verihen. Die n^3 Größen $a_{\lambda\mu}a_\nu$ hängen linear ab von den $\frac{1}{2}n(n^2+n)$ realen rößen $\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}$.

$$\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} = a_{\lambda\mu}a_\nu + a_\lambda a_{\nu\mu}. \tag{69}$$

iese Gleichungen genügen aber nicht, den $a_{\lambda\mu}a_\nu$ eine reale Bedeutung u geben, dazu sind weitere $\frac{1}{2}n(n^2-n)$ lineare Gleichungen erforderlich. Wir ählen nun:

$$a_{\lambda\mu}a_\nu = a_{\mu\lambda}a_\nu. \tag{70}$$

s ist zu bemerken, daß durch diese Gleichungen der durch (68) schon ollkommen bestimmten Übertragung keine neue Bedingung auferlegt ird. Aus Gleichungen der Form (69) ergibt sich dann

$$a_{\lambda\mu}a_\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}\right) = \begin{bmatrix}\lambda\mu\\ \nu\end{bmatrix} \tag{71}$$

nd damit

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = a_{\lambda\mu}a^\nu. \tag{72}$$

nfolge dieser Festsetzung erhalten nun auch $d\mathbf{a}\,\mathbf{a}'$ und $\mathbf{a}\,d\mathbf{a}'$ reale Beeutung:

$$\begin{aligned} &d\mathbf{a}\,\mathbf{a}' = da_\lambda \mathbf{e}_\lambda \mathbf{a}' + a_\nu\, d\mathbf{e}_\nu \mathbf{a}' = (a_{\lambda\mu}a^\nu - \Gamma^\nu_{\lambda\mu})\mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}'_\nu dx^\mu = 0,\\ &\mathbf{a}\,d\mathbf{a}' = 0, \end{aligned} \tag{73}$$

nd es ergeben sich daraus folgende einfache Formeln für die Differentiale nd Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} d\mathfrak{v}' &= d(\mathfrak{v}'\,!\,\mathbf{a}\,\mathbf{a}') = d(\mathfrak{v}'\,!\,\mathbf{a})\mathbf{a}' + \mathfrak{v}'\,!\,\mathbf{a}\,d\mathbf{a}' = d(\mathfrak{v}'\,!\,\mathbf{a})\mathbf{a}',\\ d\mathfrak{v} &= d(\mathfrak{v}\,!\,\mathbf{a}')\mathbf{a},\\ \nabla\mathfrak{v}' &= \nabla(\mathfrak{v}'\,!\,\mathbf{a})\mathbf{a}',\\ \nabla\mathfrak{v} &= \nabla(\mathfrak{v}\,!\,\mathbf{a}')\mathbf{a}\ ^{13}). \end{aligned} \tag{74}$$

ie in dieser Weise bestimmten Ausdrücke nennen wir *geodätisches Differential* bzw. geodätisches *Differentialquotient* von $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ in bezug uf $^2\mathbf{g}'$. Die $\lambda\mu$ Bestimmungszahl von $\nabla\mathfrak{v}$ ist:

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}'_\mu\,\mathbf{e}'^{\,2}_\lambda : \nabla\mathfrak{v} = \mathbf{e}'_\mu\,\mathbf{e}'^{\,2}_\lambda : \nabla(\mathbf{a}'\,!\,\mathfrak{v})\mathbf{a}\\ &\qquad = a_\mu a^\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial x^\lambda} + a_\mu a^\nu_\lambda v_\nu = \frac{\partial v_\mu}{\partial x^\lambda} - \begin{Bmatrix}\mu\lambda\\ \nu\end{Bmatrix} v_\nu. \end{aligned} \tag{75}$$

---

[13]) Die differenzierende Wirkung des Differentialoperatorkernes ∇ erstreckt sich is zur erstfolgenden *schließenden* Klammer.

Ebenso ist

$$\mathfrak{e}_\mu \mathfrak{e}'^{\,\mu}_{\lambda} \overset{2}{:} \nabla \mathfrak{v}' = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\lambda} + \left\{ \begin{matrix} \lambda\nu \\ \mu \end{matrix} \right\} v^\nu \tag{76}$$

und die geodätische Differentiation ist also identisch mit der von Christoffel eingeführten Differentiation, die man kovariante oder kogrediente Differentiation, und neuerdings auch Erweiterung genannt hat.

Die geometrische Bedeutung von $d\mathfrak{v}$ und $\nabla \mathfrak{v}$ ist sehr einfach. Wir betrachten eine Kurve s mit dem Einheitsvektor $\mathfrak{i}$ in der Tangente. Nun verschieben wir ein System von n Einheitsvektoren $\mathfrak{i}_1, \ldots, \mathfrak{i}_n$ der Kurve entlang, so daß

$$\frac{d\mathfrak{i}_j}{ds} = \mathfrak{i} \overset{1}{:} \nabla \mathfrak{i}_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{77}$$

Ist s zufällig geodetisch, so ist:

$$\frac{d\mathfrak{i}}{ds} = \mathfrak{i} \overset{1}{:} \nabla \mathfrak{i} = 0 \tag{78}$$

und die Tangente bleibt dann also in bezug auf das in der angegebenen Weise bewegte Bezugssystem $\mathfrak{i}_j$ in Ruhe. Wir nennen daher das System $\mathfrak{i}_j$, auch wenn s nicht geodätisch ist, das *geodätisch bewegte* Bezugssystem. Nun ist die geodätische Differentiation *eine gewöhnliche Differentiation in bezug auf ein geodätisch mitbewegtes System*[14]).

§ 12.

Geodätische Differentiation von Produkten.

Bekanntlich ist:

$$\begin{aligned} \nabla pq &= q \nabla p + p \nabla q, \\ \nabla q \overset{p}{\mathfrak{v}} &= q \nabla \overset{p}{\mathfrak{v}} + (\nabla q) \overset{p}{\mathfrak{v}}. \end{aligned} \tag{79}$$

Bei der Differentiation von Produkten von Vektoren wird der gewünschte Ortswechsel mit Hilfe der idealen Vektoren $\mathfrak{a}$ herbeigeführt. Dies kann noch auf zwei verschiedene Weisen stattfinden. Z. B. ist

$$\nabla \mathfrak{v}_1 \mathfrak{v}_2 \mathfrak{v}_3 = (\nabla \mathfrak{v}_1) \mathfrak{v}_2 \mathfrak{v}_3 + (\nabla \mathfrak{v}_2) \overset{1}{:} \mathfrak{a}' \mathfrak{v}_1 \mathfrak{a} \mathfrak{v}_3 + (\nabla \mathfrak{v}_3) \overset{1}{:} \mathfrak{a}' \mathfrak{v}_1 \mathfrak{v}_2 \mathfrak{a} \tag{80}$$

und auch

$$\nabla \mathfrak{v}_1 \mathfrak{v}_2 \mathfrak{v}_3 = (\nabla \mathfrak{v}_1) \mathfrak{v}_2 \mathfrak{v}_3 + \mathfrak{a} \mathfrak{v}_1 \mathfrak{a}' \overset{1}{:} (\nabla \mathfrak{v}_2) \mathfrak{v}_3 + \mathfrak{a} \mathfrak{v}_1 \mathfrak{v}_2 \mathfrak{a}' \overset{1}{:} \nabla \mathfrak{v}_3. \tag{81}$$

---

[14]) Vgl. über die Beziehungen der geodätischen Differentiation und des geodätisch bewegten Bezugssystems zum Levi-Civitaschen Begriff des Parallelismus A. R., S. 46.

§ 13.

Mehrfache Differentiation.

Ist

82) $$\mathbf{w} = \nabla q,$$

) ist

83) $$\nabla \frown \mathbf{w} = 0,$$

nd $\nabla \mathbf{w}$ demzufolge ein Tensor.

a

84) $$\mathbf{e}_\lambda = \nabla x^\lambda,$$

) folgt hieraus die später verwendete Formel:

85) $$\nabla \frown \mathbf{e}_\lambda = 0.$$

Vir identifizieren nun ko- und kontravariante Vektoren und bilden das ifferentialquotient zweiter Ordnung:

86) $$\nabla\nabla p\,\mathbf{v} = (\nabla\nabla p)\,\mathbf{v} + (\nabla p)\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^1\,\mathbf{a}\,(\nabla p)\,\mathbf{a} + p\,\nabla\nabla\mathbf{v}.$$

ei allgemein

87) $$\mathbf{r} \circ\!- \mathbf{s} = \mathbf{s}\,\mathbf{r},$$

) ist

88) $$(\nabla \circ\!- \nabla)\,p\,\mathbf{v} = (\nabla \circ\!- \nabla p)\,\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^1\,\mathbf{a}\,(\nabla p)\,\mathbf{a} + (\nabla p)\nabla\mathbf{v} + p\,(\nabla \circ\!- \nabla)\,\mathbf{v},$$

der, bei Einführung des Zeichens

89) $$_2\nabla = 2\,\nabla \frown \nabla = \nabla\nabla - \nabla \circ\!- \nabla,$$

lgemein

90) $$_2\nabla\, p\,\mathbf{v} = (_2\nabla p)\,\mathbf{v} + p\,{}_2\nabla\mathbf{v} = p\,{}_2\nabla\mathbf{v}.$$

Venden wir diese Formel an auf Gleichung (53), so ergibt sich

91) $$_2\nabla\mathbf{v} = {}_2\nabla\{(\mathbf{v}^1\,\mathbf{a})\,\mathbf{a}\} = (_2\nabla\,\mathbf{a})\,\mathbf{a}^1\,\mathbf{v}.$$

er Affinor vierten Grades $(_2\nabla\,\mathbf{a})\,\mathbf{a}$, für welchen wir das Zeichen $\overset{4}{\mathbf{K}}$ einhren, ist der Riemann-Christoffelsche Affinor. Seine $\varkappa$, λ, μ, ν Bestimmungszahl ist das Vier-Indizes-Symbol $(\varkappa\lambda\mu\nu)$. Aus (89) und (53) lgt:

92) $$\overset{4}{\mathbf{K}} = 2\{\nabla(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \frown \nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\}\,\mathbf{c}\,\mathbf{a} = 2\{\nabla(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \frown \nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\}(\mathbf{c} \frown \mathbf{a}).$$

ist in den beiden ersten sowie in den beiden letzten Faktoren alterierend (erste und dritte Identität des R. C. Affinors). Ersetzt man die ei ersten idealen Faktoren von $\overset{4}{\mathbf{K}}$ durch ihr alternierendes Produkt, so tsteht Null (zweite Identität). Die beiden ersten Faktoren dürfen mit n beiden letzten verwechselt werden (vierte Identität). Die vier Identäten können sehr einfach aus der Gleichung $\overset{4}{\mathbf{K}} = (_2\nabla\,\mathbf{a})\,\mathbf{a}$ abgeleitet erden.

§ 14.

Geometrische Bedeutung von $\overset{4}{\mathrm{K}}$.

Sind A und B zwei Punkte einer Kurve s, so stellt das über s genommene Integral

$$\int_A^B d\mathrm{v}$$

die Zunahme des Vektors v von A nach B in bezug auf ein geodetisch mitbewegtes Bezugssystem dar. Ist s geschlossen, und $A = B$, so ist das Integral bei einer nichteuklidischen Maßbestimmung im allgemeinen nicht Null. Das Integral ist offenbar dann und nur dann für jeden Vektor und für jede geschlossene Kurve Null, wenn es für die Begrenzung jedes Flächenelementes verschwindet. Wir betrachten daher[15]) das Flächenelement mit den Eckpunkten

$$x^\lambda, \quad x^\lambda + d_1 x^\lambda \quad x^\lambda + d_1 x^\lambda + d_2 x^\lambda, \quad x^\lambda + d_2 x^\lambda.$$

Die Zunahme von v vom ersten bis zum dritten Punkt ist über die eine Seite

$$d_1\mathrm{v} + d_2\mathrm{v} + d_2 d_1\mathrm{v},$$

und über die andere

$$d_2\mathrm{v} + d_1\mathrm{v} + d_1 d_2\mathrm{v}.$$

Der Unterschied ist also

$$\begin{aligned}\delta\mathrm{v} &= (d_2 d_1 - d_1 d_2)\mathrm{v} = \{(d_2\mathrm{x}\,\lrcorner\,\nabla)(d_1\mathrm{x}\,\lrcorner\,\nabla) - (d_1\mathrm{x}\,\lrcorner\,\nabla)(d_2\mathrm{x}\,\lrcorner\,\nabla)\}\mathrm{v}\\ &= (d_2 d_1\mathrm{x} - d_1 d_2\mathrm{x})\,\lrcorner\,\nabla\mathrm{v} + (d_1\mathrm{x}\,d_2\mathrm{x} - d_2\mathrm{x}\,d_1\mathrm{x})\,\lrcorner\,\nabla\nabla\mathrm{v}\\ &= d_1\mathrm{x}\,d_2\mathrm{x}\,\lrcorner\,{}_2\nabla\,\mathrm{v} = (d_1\mathrm{x} \frown d_2\mathrm{x})\,\lrcorner\,\overset{4}{\mathrm{K}}\,\mathrm{v}.\end{aligned}$$

Schreibt man ${}_2\mathfrak{f}\,d\sigma$ für den umkreisten einfachen Bivektor, wo ${}_2\mathfrak{f}$ ein Einheitsbivektor ist, und $d\sigma$ der Flächeninhalt, so ist die Zunahme von v bei der Umkreisung von $d\sigma$ demzufolge:

$$\delta\mathrm{v} = {}_2\mathfrak{f}\,\lrcorner\,\overset{4}{\mathrm{K}}\,\lrcorner\,\mathrm{v}\,d\sigma. \tag{94}$$

Diese Größe ist dann und nur dann unabhängig von v und ${}_2\mathfrak{f}$ Null, wenn $\overset{4}{\mathrm{K}}$ Null ist. $\overset{4}{\mathrm{K}} = 0$ ist also das Kriterium einer euklidischen Maßbestimmung.

Der Affinor $\overset{4}{\mathrm{K}}$ führt den Bivektor ${}_2\mathfrak{f}$ über in einen anderen Bivektor

$${}_2\mathrm{F} = {}_2\mathfrak{f}\,\lrcorner\,\overset{4}{\mathrm{K}} = \overset{4}{\mathrm{K}}\,\lrcorner\,{}_2\mathfrak{f}, \tag{95}$$

[15]) Dieser Beweis ist nicht streng, da auch mit infinitesimalen Flächenteilen anderer Gestalt Rechnung gehalten werden müßte. Der Kürze wegen ist von einem strengen Beweise abgesehen. Vgl. für eine strengere Behandlung J. Pérès, Rend. Ac. Linc. 28 (1919), S. 425–428.

und ein Vektor erfährt dann bei der Bewegung der Randkurve von ${}_2\mathbf{f}\,d\sigma$ entlang die Zunahme

(96) $$\delta\mathbf{v} = {}_2\mathbf{F}\,d\sigma\,{}^1\!\!\cdot\,\mathbf{v}.$$

Die Bivektortransformation (95) ist eine lineare homogene mit symmetrischer Determinante, und man kann $\overset{4}{\mathbf{K}}$ also einen *Bivektortensor* nennen. Im allgemeinen wird ${}_2\mathbf{F}$ für $n > 3$ ein zusammengesetzter Bivektor sein, der sich als Summe von $\frac{n}{2}$ bzw. $\frac{n-1}{2}$, für n gerade bzw. ungerade, einfache Bivektoren schreiben läßt. Die Änderung von $\mathbf{v}$ ist dann eine Drehung in den $\frac{n}{2}$ bzw. $\frac{n-1}{2}$ Ebenen dieser Bivektoren. Stellt aber $\overset{4}{\mathbf{K}}$ eine Bivektortransformation dar, die einfache Bivektoren stets in einfache überführt, so ist die Änderung von $\mathbf{v}$ eine Drehung in der Ebene von ${}_2\mathbf{F}$, bei der alle Richtungen $\perp {}_2\mathbf{F}$ in Ruhe bleiben. In dem Falle gehört zur Bivektortransformation eine Vektortransformation, und es existiert ein *reeller* Tensor ${}^2\mathbf{p} = \mathbf{p}\,\mathbf{p} = \mathbf{q}\,\mathbf{q}$, so daß:

(97) $$\overset{4}{\mathbf{K}} = (\mathbf{p} \frown \mathbf{q})(\mathbf{p} \frown \mathbf{q}) = {}^2\mathbf{p} \asymp {}^2\mathbf{p}.$$

Überschiebt man $\overset{4}{\mathbf{K}}$ in der Mitte mit ${}^2\mathbf{g}$, so entsteht der Tensor

(98) $$\mathbf{a}\,{}^2\mathbf{g}\,\mathbf{a}\,{}^3\!\!\cdot\overset{4}{\mathbf{K}} = {}^3\mathbf{K}.$$

Durch nochmalige Überschiebung mit ${}^2\mathbf{g}$ entsteht der Skalar

(99) $$ {}^2\mathbf{K}\,{}^2\!\!\cdot\,{}^2\mathbf{g} = \mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a}\,{}^4\!\!\cdot\overset{4}{\mathbf{K}} = K.$$

Die geometrische Bedeutung von K ergibt sich folgendermaßen. Die ∞^1 Richtungen eines Flächenelementes ${}_2\mathbf{f}\,d\sigma$ bestimmen geodetisch verlängert eine V_2 in der V_n. Die Größe

(100) $$ {}_2\mathbf{f}\,{}_2\mathbf{f}\,{}^4\!\!\cdot\overset{4}{\mathbf{K}}$$

ist die Krümmung der V_2 im betrachteten Punkte und heißt auch das *Krümmungsmaß* der V_n in diesem Punkte *bezüglich* der Orientierung des einfachen Bivektors ${}_2\mathbf{f}$. Nun ist

(101) $$K = \mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a}\,{}^4\!\!\cdot\overset{4}{\mathbf{K}} = (\mathbf{a} \frown \mathbf{b})(\mathbf{b} \frown \mathbf{a})\,{}^4\!\!\cdot\overset{4}{\mathbf{K}} = -\sum_{j,k}^{1,\ldots,n}(\mathbf{i}_j \frown \mathbf{i}_k)(\mathbf{i}_j \frown \mathbf{i}_k)\,{}^4\!\!\cdot\overset{4}{\mathbf{K}}$$

die negative doppelte Summe der Krümmungsmaße für $\frac{n(n-1)}{2}$ beliebige gegenseitig senkrechte Orientierungen von ${}_2\mathbf{f}$. Ist das Krümmungsmaß der V_2 unabhängig von der Orientierung, so ist also

(102) $$K_0 = -\frac{1}{n(n-1)}K$$

das Riemannsche Krümmungsmaß der V_n. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß $\overset{4}{\mathbf{K}}$ die Form hat:

$$\overset{4}{\mathbf{K}} = -\frac{2}{n(n-1)} K(\mathbf{a}\frown\mathbf{b})(\mathbf{a}\frown\mathbf{b}) = 2K_0\,{}^2\mathbf{g}\approx{}^2\mathbf{g}. \tag{103}$$

Hat $\overset{4}{\mathbf{K}}$ die besondere Form (97), und enthält ${}_2\mathbf{f}$ zwei Hauptrichtungen des Tensors ${}^2\mathbf{p}$, $\mathbf{i}_1$ und $\mathbf{i}_2$, so ist:

$$\begin{aligned} {}_2\mathbf{f}\,{}_2\mathbf{f}^4\overset{4}{\mathbf{K}} &= (\mathbf{i}_1\frown\mathbf{i}_2)(\mathbf{i}_1\frown\mathbf{i}_2)^4(\mathbf{p}\frown\mathbf{q})(\mathbf{p}\frown\mathbf{q}) \\ &= \tfrac{1}{2}p_2q_1p_2q_1 + \tfrac{1}{2}p_1q_2p_1q_2 = p_{11}p_{22}. \end{aligned} \tag{104}$$

Ein für die vorliegende Untersuchung wichtiger Fall ist, daß $\overset{4}{\mathbf{K}}$ sich auf die Form

$$\overset{4}{\mathbf{K}} = {}^2\mathbf{g}\approx{}^2\mathbf{z} = (\mathbf{a}\frown\mathbf{z})(\mathbf{a}\frown\mathbf{z}) \tag{105}$$

bringen läßt. Überschiebung mit ${}^2\mathbf{g}$ in der Mitte lehrt, daß dann

$${}^2\mathbf{K} = -\frac{n-2}{4}{}^2\mathbf{z} - \frac{1}{4}(\mathbf{z}\cdot\mathbf{z})\,{}^2\mathbf{g}. \tag{106}$$

Schreiben wir einfachheitshalber

$$\frac{n-2}{4}{}^2\mathbf{z} = {}^2\mathbf{L} = \mathbf{L}\,\mathbf{L}, \quad \frac{n-2}{4}\mathbf{z}\cdot\mathbf{z} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{L} = L, \tag{107}$$

so ist

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{K} &= -{}^2\mathbf{L} - \frac{1}{n-2}L\,{}^2\mathbf{g}, & K &= -\frac{2n-2}{n-2}L \\ {}^2\mathbf{L} &= -{}^2\mathbf{K} + \frac{1}{2(n-1)}K\,{}^2\mathbf{g} & L &= -\frac{n-2}{2n-2}K \end{aligned} \tag{108}$$

und

$$\overset{4}{\mathbf{K}} = \frac{4}{n-2}\,{}^2\mathbf{g}\approx{}^2\mathbf{L}. \tag{109}$$

Nach Ricci nennen wir die Kongruenzen der n gegenseitig senkrechten Hauptrichtungen des Tensors ${}^2\mathbf{K}$ die *Hauptkongruenzen* der V_n.[16])

§ 15.

Die Integrabilitätsbedingungen einer Affinordifferentialgleichung erster Ordnung.

In der Differentialgleichung erster Ordnung

$$\nabla p = \mathbf{w} \tag{110}$$

sei $\mathbf{w}$ eine Funktion der x^λ und von p. Ist nun in V_n eine geschlossene Kurve s mit Tangentialeinheitsvektor $\mathbf{i}$ gegeben, so kann man p in einem bestimmten Punkte P dieser Kurve einen Wert p_0 geben, und die Werte

[16]) Direzioni ed invarianti principali di una varietà qualunque, Atti. R. Ist. Veneto 62 (1904) S. 1233–1239.

von p über s bestimmen aus der Gleichung

$$\frac{dp}{ds} = \mathbf{i} \cdot \nabla p = \mathbf{i} \cdot \mathbf{w} \tag{111}$$

in der einen und in der anderen Richtung. Ist $\mathbf{w}$ ganz allgemein gegeben, so werden die zwei in dieser Weise für einen Punkt der Kurve gefundenen Werte p_1 und p_2 nicht gleich sein. Unbeschränkt integrabel ist (110) dann und nur dann, wenn für jede Wahl von p_0 und für jede Lage der Kurve und der Punkte P und Q $p_1 = p_2$. Dazu ist bekanntlich notwendig und hinreichend, daß

$$\nabla \frown \mathbf{w} = 0, \tag{112}$$

und zwar unabhängig von der Wahl von p. Die Integrabilitätsbedingungen von (110) können also durch Kombination von (110) und (112) abgeleitet werden, und zwar entweder indem man p aus (110) und (112) eliminiert, oder die Beziehungen zwischen etwaigen in $\mathbf{w}$ vorhandenen Parametern und p so wählt, daß den Gleichungen (110) und (112) zugleich genügt wird.

Wir wollen nun zeigen, daß die Integrabilitätsbedingungen der Gleichung

$$\nabla \mathbf{v} = \overset{2}{\mathbf{p}} \tag{113}$$

in derselben Weise erhalten werden aus (113) und

$$2 \nabla \overset{1}{\lrcorner} \overset{2}{\mathbf{p}} = \overset{4}{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{v}. \tag{114}$$

Dazu sei bemerkt, daß (113) gleichbedeutend ist mit den n Gleichungen

$$\nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\lambda) = \overset{2}{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_\lambda + (\nabla \mathbf{e}_\lambda) \cdot \mathbf{v}, \quad \lambda = a_1, \ldots, a_n \tag{115}$$

Da nach (85) $\nabla \frown \mathbf{e}_\lambda$ Null ist, setzen wir $\nabla \mathbf{e}_\lambda = \mathbf{q}\,\mathbf{q}$, die Integrabilitätsbedingungen von (115) werden dann erhalten aus (115) und

$$\nabla \frown (\overset{2}{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e}_\lambda + \mathbf{q}\,\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) = 0, \tag{116}$$

oder

$$(\nabla \overset{1}{\lrcorner} \overset{2}{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{e}_\lambda + \mathbf{q} \frown (\overset{2}{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{q}) + \{(\nabla \frown \nabla)\mathbf{e}_\lambda\} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{a} \frown \{\mathbf{q}\,\mathbf{q} \cdot (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{v}\} = 0, \tag{117}$$

oder, da

$$\mathbf{a} \frown \{\mathbf{q}\,\mathbf{q} \cdot (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{v}\} = (\mathbf{a} \frown \mathbf{q})\{\mathbf{q} \cdot (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{v}\} = -(\mathbf{q} \frown \mathbf{a})\{(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{v}\} \cdot \mathbf{q} = -\mathbf{q} \frown (\overset{2}{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{q}) \tag{118}$$

aus

$$2(\nabla \overset{1}{\lrcorner} \overset{2}{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{e}_\lambda + \overset{4}{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{e}_\lambda \mathbf{v} = 0 \tag{119}$$

und (115). Da aber die n Gleichungen (119) gleichbedeutend sind mit

$$2 \nabla \overset{1}{\lrcorner} \overset{2}{\mathbf{p}} = \overset{4}{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{v}, \tag{120}$$

werden die Integrabilitätsbedingungen von (113) erhalten aus (113) und (120). Entweder ist $\mathfrak{v}$ aus (113) und (120) zu eliminieren, oder es sind die Beziehungen zwischen etwaigen in $\overset{2}{\mathfrak{p}}$ vorhandenen Parametern und $\mathfrak{v}$ so zu wählen, daß den Gleichungen (113) und (120) zugleich genügt wird.

Die geometrische Bedeutung der Integrabilitätsbedingung ist folgende. Bestimmt man, anfangend in einem Punkte P mit einem beliebigen Anfangswert von $\mathfrak{v}$ die Werte über eine geschlossene Kurve s nach der Formel

$$\frac{d\mathfrak{v}}{ds} = \mathfrak{i} \overset{2}{\mathfrak{p}} \tag{121}$$

in der einen und in der anderen Richtung, so ist (120) die notwendige und hinreichende Bedingung, daß die beiden Werte von $\mathfrak{v}$ in einem Punkte Q von s gleich sind. Ist (120) erfüllt, so gibt es, Singularitäten ausgeschlossen, zu jedem in einem beliebigen Punkte der V_n angenommenen Werte von $\mathfrak{v}$ eine einzige Lösung von (113).

§ 16.

Änderung der geodetischen Differentiation bei konformen Transformationen.

Es sei die konforme Transformation gegeben durch die Gleichungen

$$'^2\mathfrak{g} = \sigma^2 \mathfrak{g}, \quad {}^2\mathfrak{g}' = \frac{1}{\sigma}\,{}^2\mathfrak{g}' \tag{122}$$

und es sei

$$\mathfrak{s} = \sigma^{-1} \nabla \sigma = \nabla \lg \sigma. \tag{123}$$

Sodann ist, wenn $\mathfrak{v}$ ein während des Überganges kovarianter Vektor ist, nach (75):

$$\mathfrak{e}'_\mu \mathfrak{e}'^\lambda \,?\, \nabla \mathfrak{v} = \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\lambda} - \tfrac{1}{2} v_\nu g^{\nu\omega} \left(\frac{\partial g_{\lambda\omega}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\omega}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\omega} \right) \tag{124}$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}'_\mu \mathfrak{e}'^\lambda \,?\, '\nabla \mathfrak{v} &= \frac{\partial v_\mu}{\partial x^\lambda} - \tfrac{1}{2} v_\nu \sigma^{-1} g^{\nu\omega} \left(\frac{\partial (\sigma g_{\lambda\omega})}{\partial x^\mu} + \frac{\partial (\sigma g_{\mu\omega})}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial (\sigma g_{\lambda\mu})}{\partial x^\omega} \right) \\ &= \mathfrak{e}'_\mu \mathfrak{e}'^\lambda \,?\, \nabla \mathfrak{v} - \tfrac{1}{2} v_\nu g^{\nu\omega} (g_{\lambda\omega} s_\mu + g_{\mu\omega} s_\lambda - g_{\lambda\mu} s_\omega), \end{aligned} \tag{125}$$

oder:

$$\begin{aligned} '\nabla \mathfrak{v} &= \nabla \mathfrak{v} - \tfrac{1}{2} \mathfrak{v} \,!\, {}^2\mathfrak{g}' \,!\, (\mathfrak{aas} + \mathfrak{asa} - \mathfrak{s}^2 \mathfrak{g}) \\ &= \nabla \mathfrak{v} - \tfrac{1}{2} \mathfrak{v} \,!\, (\mathfrak{aas} + \mathfrak{asa} - \mathfrak{s}^2 \mathfrak{g}) \\ &= \nabla \mathfrak{v} - \mathfrak{v} \frown \mathfrak{s} + \tfrac{1}{2} (\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{v})\, {}^2\mathfrak{g}. \end{aligned} \tag{126}$$

Ebenso läßt sich zeigen, daß für einen während des Überganges kontravarianten Vektor

$$'\nabla \mathfrak{v} = \nabla \mathfrak{v} - \mathfrak{v} \frown \mathfrak{s} + \tfrac{1}{2} (\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{v})\, {}^2\mathfrak{g}. \tag{127}$$

§ 1.

Änderung des Riemann-Christoffelschen Affinors bei konformen Transformationen.

Infolge (126) ist:

28) $$'\nabla\,'\nabla\,\mathfrak{v} = {}'\nabla\left(\nabla\,\mathfrak{v} - \frac{\mathfrak{v}\mathfrak{s}+\mathfrak{s}\mathfrak{v}}{2} + \frac{1}{2}(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{s})\,{}^2\mathfrak{g}\right)$$

$$= \nabla\nabla\,\mathfrak{v} - \nabla\frac{\mathfrak{v}\mathfrak{s}+\mathfrak{s}\mathfrak{v}}{2} + \frac{1}{2}\nabla(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{s})\,{}^2\mathfrak{g}$$

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{s}(\mathfrak{a}\cdot\nabla)\,\mathfrak{v}+\mathfrak{s}\nabla\,\mathfrak{v}+\mathfrak{a}(\nabla\,\mathfrak{v})\,{}^1\!\cdot\,\mathfrak{a}\mathfrak{s}+\mathfrak{s}\nabla\,\mathfrak{v}}{2} + \frac{\mathfrak{v}\mathfrak{s}\mathfrak{s}+\mathfrak{s}\mathfrak{v}\mathfrak{s}+2\mathfrak{s}\mathfrak{s}\mathfrak{v}}{4} -$$

$$(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{s})\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{s}\mathfrak{a}+\mathfrak{s}\mathfrak{a}\mathfrak{a}}{4} + \frac{{}^2\mathfrak{g}(\mathfrak{s}\cdot\nabla)\,\mathfrak{v}+\mathfrak{a}(\nabla\,\mathfrak{v})\,{}^1\!\cdot\,\mathfrak{s}\mathfrak{a}}{2} -$$

$$\frac{(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{v})\,{}^2\mathfrak{g}\mathfrak{s}+(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s})\mathfrak{a}\mathfrak{v}\mathfrak{a}+(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s})\,{}^2\mathfrak{g}\mathfrak{v}+(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{v})\mathfrak{a}\mathfrak{s}\mathfrak{a}}{4} + \frac{(\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{s})(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{a})({}^2\mathfrak{g}\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{b}+{}^2\mathfrak{g}\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{b})}{4},$$

ıd demnach, wenn wir $\mathfrak{r}^2$ schreiben für den Tensor $\nabla\mathfrak{s}$:

29) $$('\nabla\frown'\nabla)\,\mathfrak{v} = (\nabla\frown\nabla)\,\mathfrak{v} - \{(\mathfrak{a}\frown\mathfrak{r})(\mathfrak{a}\frown\mathfrak{r}) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}\frown\mathfrak{s})(\mathfrak{a}\frown\mathfrak{s}) -$$
$$- \tfrac{1}{4}(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s})(\mathfrak{a}\frown\mathfrak{b})(\mathfrak{a}\frown\mathfrak{b})\}\,{}^1\!\cdot\,\mathfrak{v}.$$

emzufolge ist

30) $$'\overset{4}{\mathfrak{K}} = \overset{4}{\mathfrak{K}} - 2(\mathfrak{a}\frown\mathfrak{r})(\mathfrak{a}\frown\mathfrak{r}) + (\mathfrak{a}\frown\mathfrak{s})(\mathfrak{a}\frown\mathfrak{s}) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s})(\mathfrak{a}\frown\mathfrak{b})(\mathfrak{a}\frown\mathfrak{b})$$
$$= \overset{4}{\mathfrak{K}} - {}^2\mathfrak{g}\approx(2\nabla\mathfrak{s} - \mathfrak{s}\mathfrak{s} + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s})\,{}^2\mathfrak{g}).$$

§ 18.

Der Riemann-Christoffelsche Affinor der konformeuklidischen Maßbestimmung.

Läßt sich die Maßbestimmung durch eine konforme Transformation f eine euklidische zurückführen, so kann $\mathfrak{s}$ so gewählt werden, daß $'\overset{4}{\mathfrak{K}}$ ıll wird. Dazu ist erstens erforderlich, daß $\overset{4}{\mathfrak{K}}$ von der Form

) $$\overset{4}{\mathfrak{K}} = \frac{4}{n-2}\,{}^2\mathfrak{g}\approx{}^2\mathfrak{L} = \frac{4}{n-2}(\mathfrak{a}\frown\mathfrak{L})(\mathfrak{a}\frown\mathfrak{L})$$

[17]), und zweitens, daß ein Vektor $\mathfrak{s}$ existiert, welcher der Gleichung

31) $$\nabla\mathfrak{s} = \frac{2}{n-2}\,{}^2\mathfrak{L} + \frac{1}{2}\mathfrak{s}\mathfrak{s} - \frac{1}{4}(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s})\,{}^2\mathfrak{g}$$

nügt. Die Integrabilitätsbedingungen von (131) werden erhalten, indem $\mathfrak{s}$ s (131) und aus

32) $$\overset{4}{\mathfrak{K}}\,{}^1\!\cdot\,\mathfrak{s} = 2(\nabla\frown\nabla)\,\mathfrak{s} = \frac{4}{n-2}\nabla\,{}^1\!\lrcorner\,{}^2\mathfrak{L} + \nabla\,{}^1\!\lrcorner(\mathfrak{s}\mathfrak{s}) - \frac{1}{2}\{\nabla(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{s})\}\,{}^1\!\lrcorner\,{}^2\mathfrak{g}$$

[17]) Diese Bedingung ist zuerst als notwendig erkannt von H. Weyl, Reine Infinitesimalgeometrie, Math. Zeitschr., 2 (1918), S. 384—411, insb. S. 404.

oder, anders geschrieben:

$$(133)\quad \overset{4}{\mathbf{K}}{}^{1}{}_{2}\mathbf{s} = \frac{4}{n-2}\nabla\,\overset{1}{\lrcorner}\,{}^{2}\mathbf{L} + \tfrac{1}{2}\mathbf{rsr} - \tfrac{1}{2}\mathbf{srr} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})\mathbf{raa} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})\mathbf{ara},$$

eliminiert wird. Nun ergibt sich aus (I):

$$(134)\quad \begin{aligned}\overset{4}{\mathbf{K}}{}^{1}{}_{2}\mathbf{s} &= \frac{2}{n-2}(\mathbf{a}\frown\mathbf{L})\mathbf{a}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{s}) - \frac{2}{n-2}(\mathbf{a}\frown\mathbf{L})\mathbf{L}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{s})\\ &= \frac{1}{n-2}\{\mathbf{as}^{1}{}_{2}\mathbf{La} - \mathbf{s}^{1}{}_{2}\mathbf{Laa} - \mathbf{s}^{2}\mathbf{L} + \mathbf{LsL}\},\end{aligned}$$

welche Gleichung unter Berücksichtigung von (131) übergeht in

$$(135)\quad \overset{4}{\mathbf{K}}{}^{1}{}_{2}\mathbf{s} = \tfrac{1}{2}\mathbf{rsr} - \tfrac{1}{2}\mathbf{srr} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})\mathbf{raa} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s})\mathbf{ara},$$

sodaß die Integrabilitätsbedingungen lauten

$$(\mathrm{II})\quad \nabla\,\overset{1}{\lrcorner}\,{}^{2}\mathbf{L} = 0\ ^{18}).$$

Da $\overset{4}{\mathbf{K}}$ für $n=3$ immer von der Form (I) ist[19]), haben wir den schon von Cotton bewiesenen Satz erhalten:

Eine V_3 ist dann und nur dann konformeuklidisch, wenn der Affinor $\nabla\,\overset{1}{\lrcorner}\,{}^{2}\mathbf{L}$ in jedem Punkte Null ist.

Für $n>3$ wird, wie wir jetzt zeigen wollen, (II) eine Identität, und (I) damit außer notwendig auch hinreichend.

§ 19.

Die Bianchische Identität.

Bianchi[20]) hat bewiesen, daß bei jeder beliebigen Wahl von ${}^{2}\mathbf{g}$ die Identität gilt:

$$(136)\quad \nabla\,\overset{2}{\lrcorner}\,\overset{4}{\mathbf{K}} = 0.$$

Wir bringen hier einen sehr kurzen Beweis ohne Koordinaten. Allgemein ist für einen beliebigen Affinor zweiten Grades $\mathbf{pq}$:

$$(137)\quad 2(\nabla\frown\nabla)\mathbf{pq} = \overset{4}{\mathbf{K}}{}^{1}{}_{2}\mathbf{pq} + \overset{4}{\mathbf{K}}{}^{2}{}_{1}\mathbf{qapa}.$$

Setzt man nun $\mathbf{pq}=\nabla\mathbf{v}$, so folgt, da $\nabla\frown\nabla\frown\mathbf{w}$ für alle Werte von $\mathbf{w}$ identisch verschwindet[21]) und mit Berücksichtigung der dritten Identität (S. 73):

---

[18]) Diese Gleichung hat für $n=3$ dieselbe Bedeutung wie die von Cotton, Ann. de Toulouse **1** (1899), S. 412, aufgestellte Bedingung.

[19]) Vgl. S. 84.

[20]) Sui simboli a quattro indici e sulla curvatura di Riemann, Rend. d. Linc., **11. 1** (1902), S. 3–7.

[21]) A. R. S. 55.

38) $$2(\nabla \frown \nabla \frown \nabla)\mathfrak{v} = 0 + (\overset{4}{\mathfrak{K}}{}^{2} \mathfrak{q}\mathfrak{a}) \overset{1}{\lrcorner} \mathfrak{p}\mathfrak{a}$$
$$= (\mathfrak{p} \overset{2}{\lrcorner} \overset{4}{\mathfrak{K}})^{2} \mathfrak{q}\mathfrak{a}\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \overset{2}{\lrcorner} \overset{4}{\mathfrak{K}}{}^{1} \mathfrak{q}.$$

dererseits ist

39) $$2\nabla(\nabla \frown \nabla)\mathfrak{v} = \nabla \overset{4}{\mathfrak{K}}{}^{1} \mathfrak{v} = (\nabla \overset{4}{\mathfrak{K}})^{1} \mathfrak{v} + (\nabla \mathfrak{v})^{1} \mathfrak{a} \overset{4}{\mathfrak{K}}{}^{1} \mathfrak{a}$$

d demnach

40) $$2(\nabla \frown \nabla \frown \nabla)\mathfrak{v} = (\nabla \overset{2}{\lrcorner} \overset{4}{\mathfrak{K}})^{1} \mathfrak{v} + \mathfrak{p} \overset{2}{\lrcorner} \overset{4}{\mathfrak{K}}{}^{1} \mathfrak{q}.$$

rgleichung von (138) und (140) lehrt:

41) $$(\nabla \overset{2}{\lrcorner} \overset{4}{\mathfrak{K}})^{1} \mathfrak{v} = 0$$

r jede beliebige Wahl von $\mathfrak{v}$, und dies ist nur möglich, wenn $\nabla \overset{2}{\lrcorner} \overset{4}{\mathfrak{K}}$ entisch verschwindet. Für $n = 2$ ist jedes alternierende Produkt von ei Faktoren Null, und (136) ist also dann schon aus dem Grunde eine entität.

§ 20.

Folgerungen aus der Bianchischen Identität.

Schreiben wir vorübergehend:

42) $$\overset{4}{\mathfrak{K}} = (\mathfrak{k}_1 \frown \mathfrak{k}_2)(\mathfrak{k}_3 \frown \mathfrak{k}_4),$$

lautet die Bianchische Identität:

43) $$\nabla \overset{2}{\lrcorner} \overset{4}{\mathfrak{K}} = (\mathfrak{a} \cdot \nabla)\{(\mathfrak{a} \frown \mathfrak{k}_1 \frown \mathfrak{k}_2)(\mathfrak{k}_3 \frown \mathfrak{k}_4)\} = 0.$$

erschiebung mit ${}^{2}\mathfrak{g}$ in der Mitte ergibt:

$$0 = (\mathfrak{a} \cdot \nabla)\{(\mathfrak{a} \frown \mathfrak{k}_1 \frown \mathfrak{k}_2)^{1} \mathfrak{b}\mathfrak{b}^{1} (\mathfrak{k}_3 \frown \mathfrak{k}_4)\}$$
$$= \tfrac{1}{6}(\mathfrak{a} \cdot \nabla)\{(\mathfrak{a} \frown \mathfrak{k}_1)(\mathfrak{k}_2 \cdot \mathfrak{k}_3)\mathfrak{k}_4 + (\mathfrak{k}_1 \frown \mathfrak{k}_2)(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{k}_3)\mathfrak{k}_4 + (\mathfrak{k}_2 \frown \mathfrak{a})(\mathfrak{k}_1 \cdot \mathfrak{k}_3)\mathfrak{k}_4$$
$$- (\mathfrak{a} \frown \mathfrak{k}_1)(\mathfrak{k}_2 \cdot \mathfrak{k}_4)\mathfrak{k}_3 - (\mathfrak{k}_1 \frown \mathfrak{k}_2)(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{k}_4)\mathfrak{k}_3 - (\mathfrak{k}_2 \frown \mathfrak{a})(\mathfrak{k}_1 \cdot \mathfrak{k}_4)\mathfrak{k}_3\}$$
$$= \tfrac{1}{6}(\mathfrak{a} \cdot \nabla)\{4\mathfrak{a} \overset{1}{\lrcorner} {}^{2}\mathfrak{K} - 2\overset{4}{\mathfrak{K}}{}^{1} \mathfrak{a}\} = \tfrac{2}{3}\nabla \overset{1}{\lrcorner} {}^{2}\mathfrak{K} + \tfrac{1}{3}(\mathfrak{a} \cdot \nabla)\overset{4}{\mathfrak{K}}{}^{1} \mathfrak{a}.$$

rch nochmalige Überschiebung mit ${}^{2}\mathfrak{g}$ entsteht:

$$0 = \tfrac{1}{6}(\mathfrak{a} \cdot \nabla)\{\mathfrak{a}(\mathfrak{k}_1 \cdot \mathfrak{k}_4)(\mathfrak{k}_3 \cdot \mathfrak{k}_2) - \mathfrak{a}(\mathfrak{k}_1 \cdot \mathfrak{k}_3)(\mathfrak{k}_4 \cdot \mathfrak{k}_2) - \mathfrak{k}_1(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{k}_4)(\mathfrak{k}_3 \cdot \mathfrak{k}_2)$$
$$- \mathfrak{k}_2(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{k}_3)(\mathfrak{k}_3 \cdot \mathfrak{k}_4) + \mathfrak{k}_1(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{k}_3)(\mathfrak{k}_2 \cdot \mathfrak{k}_4) + \mathfrak{k}_2(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{k}_4)(\mathfrak{k}_1 \cdot \mathfrak{k}_3)\}$$
$$= \tfrac{1}{6}(\mathfrak{a} \cdot \nabla)(2\mathfrak{a}K - 4\mathfrak{a}^{1} {}^{2}\mathfrak{K})$$
$$= -\tfrac{2}{3}\nabla^{1}({}^{2}\mathfrak{K} - \tfrac{1}{2}K\,{}^{2}\mathfrak{g}).$$

tzt man:

46) $${}^{2}\mathfrak{G} = {}^{2}\mathfrak{K} - \tfrac{1}{2}K\,{}^{2}\mathfrak{g},$$

ist also:

$$\nabla \overset{1}{:} {}^2\mathbf{G} = 0. \tag{147}$$

(${}^2\mathbf{G}$ tritt in der Relativitätstheorie auf als Tensor der Materie.)[22])

Ist die Bedingung (I) erfüllt, so bestehen infolge (108) zwischen ${}^2\mathbf{G}$ und ${}^2\mathbf{L}$ folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{L} &= -{}^2\mathbf{G} + \frac{1}{n-1} G\, {}^2\mathbf{g}, & L &= \frac{1}{n-1} G \\ {}^2\mathbf{G} &= -{}^2\mathbf{L} + L\, {}^2\mathbf{g}, & G &= {}^2\mathbf{G} \overset{2}{:} {}^2\mathbf{g} = (n-1) L \end{aligned} \tag{148}$$

In diesem Falle lautet die Identität von Bianchi:

$$\nabla \overset{2}{\neg} \{(\mathbf{a} \frown \mathbf{L})(\mathbf{a} \frown \mathbf{L})\} = 0. \tag{149}$$

Setzt man vorübergehend:

$$\nabla\, {}^2\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2 \mathbf{l}_2, \tag{150}$$

so ist also:

$$(\mathbf{l}_1 \widehat{\mathbf{a}} \mathbf{l}_2)(\mathbf{a} \frown \mathbf{l}_2) = 0. \tag{151}$$

Überschiebung mit ${}^2\mathbf{g}$ in der Mitte ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{1}{6}\{(\mathbf{l}_1 \frown \mathbf{a})(\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{a})\, \mathbf{l}_2 + (\mathbf{a} \frown \mathbf{l}_2)(\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{a})\, \mathbf{l}_2 + (\mathbf{l}_2 \frown \mathbf{l}_1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\, \mathbf{l}_2 \\ &\quad - (\mathbf{l}_1 \frown \mathbf{a})(\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{l}_2)\, \mathbf{a} - (\mathbf{a} \frown \mathbf{l}_2)(\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_2)\, \mathbf{a} - (\mathbf{l}_2 \frown \mathbf{l}_1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{l}_2)\, \mathbf{a}\} \\ &= \tfrac{1}{6}\{(3-n)(\mathbf{l}_1 \frown \mathbf{l}_2)\, \mathbf{l}_2 - (\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{l}_2)\, \mathbf{l}_1 \overset{1}{\neg} {}^2\mathbf{g} + (\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_2)\, \mathbf{l}_2 \overset{1}{\neg} {}^2\mathbf{g}\} \\ &= \tfrac{1}{6}\{(3-n) \nabla \overset{1}{\neg} {}^2\mathbf{L} + \{\nabla \overset{1}{:} ({}^2\mathbf{L} - L\, {}^2\mathbf{g})\} \overset{1}{\neg} {}^2\mathbf{g}\} \\ &= \tfrac{1}{6}\{(3-n) \nabla \overset{1}{\neg} {}^2\mathbf{L} - (\nabla \overset{1}{:} {}^2\mathbf{G}) \overset{1}{\neg} {}^2\mathbf{g}\}. \end{aligned} \tag{152}$$

Für $n > 3$ ist also die Integrabilitätsbedingung $\nabla \overset{1}{\neg} {}^2\mathbf{L}$ eine Folge der Bianchischen Identität. Für $n = 3$ ist

$$\nabla \overset{2}{\neg} \overset{4}{\mathbf{K}} = 12 (\mathbf{i}_1 \widehat{\mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3})(\nabla \overset{1}{:} {}^2\mathbf{G}) \overset{1}{:} (\mathbf{i}_1 \widehat{\mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3}). \tag{153}$$

Da $\mathbf{i}_1 \widehat{\mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3}$ invariant ist, ist die Bianchische Identität hier also gleichbedeutend mit (147).

Für $n = 2$ ist $\overset{4}{\mathbf{K}}$ ein Skalar:

$$\begin{aligned} \overset{4}{\mathbf{K}} &= -K (\mathbf{a} \frown \mathbf{b})(\mathbf{a} \frown \mathbf{b}) \\ {}^2\mathbf{K} &= \tfrac{1}{2} K\, {}^2\mathbf{g}. \end{aligned} \tag{154}$$

${}^2\mathbf{G}$ ist also identisch Null:

$${}^2\mathbf{G} = {}^2\mathbf{K} - \tfrac{1}{2} K\, {}^2\mathbf{g} = 0 \tag{155}$$

[22]) Eine Tabelle der Bezeichnungen bei verschiedenen Autoren findet sich A. R. S. 66.

d $^2\mathbf{L}$ ebenfalls:

$$^2\mathbf{L} = -\,^2\mathbf{G} + G\,^2\mathbf{g} = 0. \tag{56}$$

r können also den Satz aussprechen:

Eine V_n ist für $n = 2$ stets konformeuklidisch, für $n > 3$ ist sie es nn und nur dann, wenn sich der Riemann-Christoffelsche Affinor doppelte vektorische Überschiebung eines Tensors mit dem Fundantaltensor schreiben läßt.

Ist $\overset{4}{\mathbf{K}}$ ein Skalar für $n > 2$:

$$\overset{4}{\mathbf{K}} = -\frac{2}{n(n-1)} K(\mathbf{a} \frown \mathbf{b})(\mathbf{a} \frown \mathbf{b}) \tag{57}$$

$$^2\mathbf{K} = \frac{1}{n} K\,^2\mathbf{g},$$

ist

$$^2\mathbf{G} = \frac{1}{n} K\,^2\mathbf{g} - \tfrac{1}{2} K\,^2\mathbf{g} = -\frac{n-2}{2n} K\,^2\mathbf{g} \tag{58}$$

d infolge (147) ist also

$$\nabla\,{}^1 K\,^2\mathbf{g} = (\nabla K)\,{}^1\,^2\mathbf{g} = \nabla K = 0. \tag{59}$$

es ist der Satz von Schur[23]), der zum Ausdruck bringt, daß in jeder V_n, der $\overset{4}{\mathbf{K}}$ in jedem Punkte ein Skalar ist, K konstant ist.

§ 21.

Beziehungen zu den n-fachen Orthogonalsystemen.

Sind $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n$ die Einheitsvektoren von n gegenseitig senkrechten $_{n-1}$-normalen[24]) Kongruenzen, und ist $n > 3$, so ist, wie an anderer elle[25]) gezeigt wurde:

$$\mathbf{i}_j \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m\, \overset{4}{\mathbf{K}} = 0, \qquad j, k, l, m = 1, \ldots, n, \tag{60}$$

nn die Indizes j, k, l, m alle ungleich sind. Wenn jeder Satz von n gegentig senkrechten Richtungen in jedem Punkte der V_n zu wenigstens einem fachen Orthogonalsystem gehört, so gilt (160) also für jeden Satz von r senkrechten Richtungen. Wir wollen beweisen, daß auch die Umhrung dieses Satzes gilt. Dazu sei erst gezeigt, daß in dem Falle $\overset{4}{\mathbf{K}}$ die ppelte vektorische Überschiebung eines Tensors mit dem Fundamentalnsor ist. Ist

$$\overset{4}{\mathbf{K}} = {}^2\mathbf{g} \barwedge {}^2\mathbf{z} = (\mathbf{a} \frown \mathbf{z})(\mathbf{a} \frown \mathbf{z}), \tag{61}$$

[23]) Math. Ann. (1886) S. 563.

[24]) Eine Kongruenz $\mathbf{i}$ ist V_m-normal wenn sie senkrecht ist zu einer Schar von $^{n-m}V_m$, Wie a. S. 10 a. O. S. 204, englisch S. 597, gezeigt wurde, ist notwendige d hinreichende Bedingung, daß die V_m-Komponente von $\nabla\mathbf{i}$ ein Tensor ist.

[25]) A. S. a. O. S. 456, englisch S. 688.

so muß sich $^2\mathbf{z}$ also aus dieser Gleichung berechnen lassen, wenn alle Bestimmungszahlen mit vier ungleichen Indizes Null sind. Aus (161) folgt

$$(162)\quad \begin{matrix} 4K_{jkjl} = a_j z_k a_j z_l = z_{kl} \\ 4K_{jkjk} = (a_j z_k - a_k z_j)(a_j z_k - a_k z_j) = z_{kk} + z_{jj} \end{matrix} \Big\} \begin{matrix} j,k,l = 1,\ldots,n \\ j,k,l \neq . \end{matrix}$$

Für $n = 3$ sind diese Gleichungen stets verträglich und $\overset{4}{\mathbf{K}}$ hat also hier stets die Form (161). Für $n > 3$ sind sie es nur, wenn

$$(163)\quad \begin{matrix} K_{jkjl} = K_{mkml} \\ K_{jkjk} + K_{mlml} = K_{mkmk} + K_{jljl} \end{matrix} \Big\} \begin{matrix} j,k,l,m = 1,\ldots,n \\ j,k,l,m \neq . \end{matrix}$$

Setzt man nun:

$$(164)\quad \begin{aligned} \mathbf{i}_\alpha &= \mathbf{i}_j \cos\varphi + \mathbf{i}_m \sin\varphi \\ \mathbf{i}_\beta &= -\mathbf{i}_j \sin\varphi + \mathbf{i}_m \cos\varphi \\ \mathbf{i}_\gamma &= \mathbf{i}_l \cos\psi + \mathbf{i}_k \sin\psi \\ \mathbf{i}_\delta &= -\mathbf{i}_l \sin\psi + \mathbf{i}_k \cos\psi, \end{aligned}$$

so sind $\mathbf{i}_\alpha, \mathbf{i}_\beta, \mathbf{i}_\gamma$ und $\mathbf{i}_\delta$ gegenseitig senkrecht und es ist also:

$$(165)\quad \begin{aligned} &\{(\mathbf{i}_l \frown \mathbf{i}_j)\cos\varphi\cos\psi + (\mathbf{i}_k \frown \mathbf{i}_j)\cos\varphi\sin\psi + (\mathbf{i}_l \frown \mathbf{i}_m)\sin\varphi\cos\psi \\ &+ (\mathbf{i}_k \frown \mathbf{i}_m)\sin\varphi\sin\psi\}\{(\mathbf{i}_l \frown \mathbf{i}_j)\sin\varphi\sin\psi - (\mathbf{i}_k \frown \mathbf{i}_j)\sin\varphi\cos\psi \\ &= -(\mathbf{i}_l \frown \mathbf{i}_m)\cos\varphi\sin\psi + (\mathbf{i}_k \frown \mathbf{i}_m)\cos\varphi\cos\psi\} \overset{4}{\cdot} \overset{4}{\mathbf{K}} = 0 \end{aligned}$$

für alle Werte von φ und ψ und folglich:

$$(166)\quad \begin{aligned} K_{jljl} - K_{jkjk} - K_{mlml} + K_{mkmk} &= 0 \\ -K_{jkjl} + K_{mkml} &= 0. \end{aligned}$$

Die Bedingungen (163) sind also erfüllt. Dann lehrt aber (161), daß die V_n konformeuklidisch ist, und da in einem euklidischen Raum durch jeden Punkt n-fache Orthogonalsysteme in jeder Lage hindurchgehen, und ein Orthogonalsystem bei konformen Transformationen erhalten bleibt, ist damit die Umkehrung bewiesen.

Wir haben also den Satz erhalten:

Eine V_n, $n > 3$ enthält dann und nur dann durch jeden seiner Punkte n-fache Orthogonalsysteme in jeder Lage, wenn die Gleichung

$$\mathbf{i}_j \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \overset{4}{\cdot} \overset{4}{\mathbf{K}} = 0$$

in jedem Punkte für jedes System von vier gegenseitig senkrechten Richtungen j,k,l,m gilt, dies ist aber dann und nur dann der Fall, wenn die Maßbestimmung eine konformeuklidische ist.

Für $n = 3$ gilt der schon von Cotton[26]) bewiesene Satz:

Eine V_3 enthält durch jeden Punkt dreifache Orthogonalsysteme in jeder Lage.

[26]) l. c. 1899, S. 410.

Da n-fache Orthogonalsysteme sich gegenseitig in Krümmungslinien neiden, bleiben die Krümmungslinien jeder V_{n-1}, die zu einem n-fachen hogonalsystem gehört, erhalten. Für eine beliebige V_{n-1} kann dies gendermaßen bewiesen werden. Es sei $\mathfrak{i}_n$ die zu V_{n-1} senkrechte geoische Kongruenz, so ist[27])

7) $$^2\mathfrak{h} = \nabla \mathfrak{i}_n$$

zweite Fundamentaltensor der V_{n-1}, dessen Hauptrichtungen die uptkrümmungsrichtungen sind. Wir üben nun eine konforme Transnation aus und betrachten währenddessen $\mathfrak{i}_n$ als kovariant. Sodann nach der Transformation $'\mathfrak{i}_n = \mathfrak{i}_n\sqrt{\sigma}$ ein Einheitsvektor und es ist h (126):

8)
$$\begin{aligned} '\Gamma\,'\mathfrak{i}_n &= {}'\nabla(\mathfrak{i}_n\sqrt{\sigma}) = ({}'\nabla\sqrt{\sigma})\,\mathfrak{i}_n + \sqrt{\sigma}\left\{\nabla\mathfrak{i}_n - \frac{\mathfrak{s}\,\mathfrak{i}_n + \mathfrak{i}_n\mathfrak{s}}{2} + \frac{1}{2}(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{i}_n)^2\mathfrak{g}\right\} \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\sigma}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{i}_n + \sqrt{\sigma}\nabla\mathfrak{i}_n - \tfrac{1}{2}\sqrt{\sigma}\,\mathfrak{s}\,\mathfrak{i}_n - \tfrac{1}{2}\sqrt{\sigma}\,\mathfrak{i}_n\mathfrak{s} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\sigma}(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{i}_n)^2\mathfrak{g} \\ &= \sqrt{\sigma}\nabla\mathfrak{i}_n - \tfrac{1}{2}\sqrt{\sigma}\,\mathfrak{i}_n\mathfrak{s} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\sigma}(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{i}_n)^2\mathfrak{g} \\ &= \sqrt{\sigma}\,{}^2\mathfrak{h} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\sigma}(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{i}_n)({}^2\mathfrak{g} - \mathfrak{i}_n\mathfrak{i}_n) - \tfrac{1}{2}\sqrt{\sigma}\,\mathfrak{i}_n\{\mathfrak{s} - (\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{i}_n)\mathfrak{i}_n\}. \end{aligned}$$

ch der Transformation ist $'\mathfrak{i}_n$ nicht mehr geodetisch und es ist, wenn den Krümmungsvektor von $'\mathfrak{i}_n$ darstellt[28]),

9) $$'\nabla\mathfrak{i}_n = {}'^2\mathfrak{h} + {}'\mathfrak{i}_n\,'\mathfrak{u}_n,$$

daß

0)
$$\begin{aligned} {}'^2\mathfrak{h} &= \sqrt{\sigma}\{{}^2\mathfrak{h} + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{i}_n)({}^2\mathfrak{g} - \mathfrak{i}_n\mathfrak{i}_n)\}, \\ '\mathfrak{u}_n &= -\tfrac{1}{2}\{\mathfrak{s} - (\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{i}_n)\mathfrak{i}_n\}. \end{aligned}$$

Hauptrichtungen von $^2\mathfrak{h}$ und $'^2\mathfrak{h}$ sind also dieselben und infolgesen sind die Hauptkrümmungsrichtungen der V_{n-1} bei der Transformai invariant.

§ 22.

Beziehungen zu den V_{n-1} mit lauter Nabelpunkten.

Ist $^2\mathfrak{h}$ in irgendeinem Punkte der V_{n-1} ein Skalar:

1) $$^2\mathfrak{h} = h({}^2\mathfrak{g} - \mathfrak{i}_n\mathfrak{i}_n),$$

st der betreffende Punkt ein *Nabelpunkt*. Man kann nun die Frage werfen, welchen Bedingungen eine V_{n-1} unterworfen sein muß, damit ch jeden Punkt senkrecht zu jeder Richtung eine V_{n-1} mit lauter

[27]) Vgl. den S. 10 a. O. S. 208, englisch S. 601.

[28]) Vgl. den S. 10 a. O. S. 206, englisch S. 599.

Nabelpunkten gelegt werden kann. Ist $\mathfrak{i}_n$ die zu ∞^1 solcher V_{n-1} senkrechte Kongruenz, so ist

$$\nabla \mathfrak{i}_n = h({}^2\mathfrak{g} - \mathfrak{i}_n \mathfrak{i}_n) + \mathfrak{i}_n \mathfrak{u}_n. \tag{172}$$

Die Integrabilitätsbedingungen sind zu erhalten aus (172) und

$$\tfrac{1}{2} \overset{4}{\mathfrak{K}} : \mathfrak{i}_n = \nabla \frown \{h({}^2\mathfrak{g} - \mathfrak{i}_n \mathfrak{i}_n) + \mathfrak{i}_n \mathfrak{u}_n\}, \tag{173}$$

welche Gleichung für eine einzige V_{n-1} nur für jedes innerhalb dieser V_{n-1} gelegene Gebiet erfüllt zu sein braucht. (172) ist also zu kombinieren mit

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} \mathfrak{i}_j \mathfrak{i}_k {}^2 : \overset{4}{\mathfrak{K}} : \mathfrak{i}_n \\ &= \mathfrak{i}_j \mathfrak{i}_k {}^2 : \Big[\sum_m^{1,\ldots,n-1} \{(\nabla h) \frown \mathfrak{i}_m\} \mathfrak{i}_m - h(\nabla \frown \mathfrak{i}_n) \mathfrak{i}_n - h\{((\nabla \mathfrak{i}_n) : \mathfrak{a}) \frown \mathfrak{i}_n\} \mathfrak{a} \Big] \end{aligned} \tag{174}$$

$j, k = 1, \ldots, n-1,$

wo $\mathfrak{i}_1, \ldots, \mathfrak{i}_{n-1}$ beliebige gegenseitig senkrechte Kongruenzen in V_{n-1} darstellen.

Aus (172) und (174) folgt:

$$\mathfrak{i}_j \mathfrak{i}_k {}^2 : \overset{4}{\mathfrak{K}} : \mathfrak{i}_n = (\mathfrak{i}_k ! \nabla h) \mathfrak{i}_j - (\mathfrak{i}_j ! \nabla h) \mathfrak{i}_k. \tag{175}$$

Soll die Gleichung (172) also unbeschränkt integrabel sein, d. h. soll durch jeden Punkt, senkrecht zu jeder Richtung eine V_{n-1} mit lauter Nabelpunkten geben, so muß $\mathfrak{i}_j \mathfrak{i}_k {}^2 : \overset{4}{\mathfrak{K}} : \mathfrak{i}_n$ nur Komponenten in der j, k-Ebene besitzen. Für $n = 3$ ist diese Bedingung immer erfüllt, für $n > 3$ muß gelten

$$\mathfrak{i}_j \mathfrak{i}_k \mathfrak{i}_l \mathfrak{i}_n {}^4 : \overset{4}{\mathfrak{K}} = 0 \tag{176}$$

für jede Wahl von vier ungleichen gegenseitig senkrechten Richtungen j, k, l, n. Dies ist aber, wie in § 21 gezeigt wurde, für $n > 3$ die Bedingung der konformeuklidischen Maßbestimmung, und wir haben also den Satz erhalten:

Damit eine V_n, $n > 3$, durch jeden Punkt, senkrecht zu jeder Richtung eine V_{n-1} mit lauter Nabelpunkten enthält, ist notwendig und hinreichend, daß die Maßbestimmung konformeuklidisch sei.

Für $n = 3$ gilt:

Eine V_3 enthält durch jeden Punkt senkrecht zu jeder Richtung eine V_2 mit lauter Nabelpunkten.

Nimmt man die Forderung hinzu, daß h über V_{n-1} konstant sein soll, so geht die Bedingung über in

77) $$\mathbf{i}_j \mathbf{i}_k \overset{4}{\mathbf{K}} \mathbf{i}_n = 0 \quad [29])$$

r jede Wahl von drei ungleichen gegenseitig senkrechten Richtungen k und n.

Wir wollen zeigen, daß diese Bedingung nur in einer V_n konstanter rümmung erfüllt sein kann. Da (176) erfüllt ist, läßt sich $\overset{4}{\mathbf{K}}$ schreiben:

78) $$\overset{4}{\mathbf{K}} = \frac{1}{n-2}(\mathbf{aLaL} - \mathbf{LaaL} - \mathbf{aLLa} + \mathbf{LaLa}),$$

d (177) ergibt also:

79) $$L_{jn}\mathbf{i}_k - L_{kn}\mathbf{i}_j = 0, \qquad (j, k = 1, \ldots, n-1)$$

er

80) $$L_{jn} = 0. \qquad (j = 1, \ldots, n-1).$$

bt es also eine V_{n-1} mit lauter Nabelpunkten und konstantem h, so diese V_{n-1} senkrecht zu einer Hauptkongruenz der V_n [30]). Soll es aber ^{n} V_{n-1} dieser Art geben, so ist das nur möglich, wenn $^2\mathbf{L}$ ein Skalar wird:

81) $$^2\mathbf{L} = \frac{1}{n} L\, {}^2\mathbf{g},$$

d damit geht $\overset{4}{\mathbf{K}}$ über in

82) $$\overset{4}{\mathbf{K}} = -\frac{2}{n(n-1)} K (\mathbf{a} \frown \mathbf{b})(\mathbf{a} \frown \mathbf{b}),$$

h. die V_n hat konstante Krümmung.

§ 23.

Bedingungen für eine V_n, die in einer R_{n+1} liegt.

Es sei $^2\mathbf{g}'$ der Fundamentaltensor der R_{n+1} und ∇' der zugehörige ifferentialoperatorkern. Ferner sei $\mathbf{i}_{n+1}$ die auf V_n senkrechte in R_{n+1} eodetische Kongruenz. Sodann ist

83) $$\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{b}\,\mathbf{a} \overset{2}{\nabla'} \mathbf{i}_{n+1} = {}^2\mathbf{h} = \mathbf{h}_1\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2\mathbf{h}_2$$

er zweite Fundamentaltensor der V_n. Die Gaußsche Formel lautet:

84) $$\overset{4}{\mathbf{K}} = 2(\mathbf{h}_1 \frown \mathbf{h}_2)(\mathbf{h}_1 \frown \mathbf{h}_2)$$

---

[29]) Diese Bedingung ist zuerst aufgestellt von A. Voß, Math. Ann., **16** (1880), 129—179, insb. S. 151.

[30]) Für den Fall $h = 0$, d. h. für den Fall, daß die V_{n-1} geodetisch sind, ist ese Eigenschaft für $n = 3$ bewiesen von Ricci, Sulle superficie geodetiche in una rietà qualunque etc. Rend. dei Lincei, **12.** 1 (1903), S. 409—420, insb. S. 415 und r $n > 3$ von Ricci, l. c. 1904, S. 1239.

und die Codazzische

$$\nabla \frac{1}{\lambda} {}^2\mathbf{h} = 0 \quad (185)$$

[31]).

Soll die V_n konformeuklidisch sein, so ist für $n > 3$ notwendig und hinreichend, daß sich $\overset{4}{\mathbf{K}}$ schreiben läßt:

$$\overset{4}{\mathbf{K}} = \frac{4}{n-2} (\mathbf{a} \frown \mathbf{L})(\mathbf{a} \frown \mathbf{L}). \quad (186)$$

Werden in V_n n Kongruenzen $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n$ in den n gegenseitig senkrechten Hauptrichtungen des Tensors ${}^2\mathbf{h}$ angenommen, so ergibt sich aus (184) und (186):

$$2(h_{1i}h_{2j} - h_{1j}h_{2i})(h_{1i}h_{2j} - h_{1j}h_{2i}) = 4h_{ii}h_{jj} = \frac{4}{n-2}(L_{ii} + L_{jj}), \quad (187)$$

und

$$i, j = 1, \ldots, n, \; i \neq j$$

$$2(h_{1i}h_{2j} - h_{1j}h_{2i})(h_{1j}h_{2k} - h_{1k}h_{2j}) = 0 = -L_{ik}, \; i, j, k = 1, \ldots, n; \; i, j, k \text{ ungleich} \quad (188)$$

(188) lehrt, daß die Hauptrichtungen von ${}^2\mathbf{L}$ mit den Hauptrichtungen von ${}^2\mathbf{h}$ zusammenfallen müssen. Die Gleichungen (187) sind für $n > 3$ nur dann verträglich, wenn

$$h_{ii}h_{jj} + h_{kk}h_{ll} = h_{ii}h_{kk} + h_{jj}h_{ll}, \quad \begin{cases} i, j, k, l = 1, \ldots, n \\ i, j, k, l \text{ ungleich} \end{cases} \quad (189)$$

oder:

$$(h_{ii} - h_{ll})(h_{jj} - h_{kk}) = 0. \quad (190)$$

Dies ist nur der Fall, wenn von den n Größen h_{ii} wenigstens $n-1$ gleich sind. Sind alle n Größen h_{ii} gleich, so ist ${}^2\mathbf{h}$ ein Skalar und die V_n ist eine Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung.

A. Finzi[32]) hat den Fall $n = 3$ behandelt und bewiesen, daß für $n = 3$ entweder wenigstens zwei der Größen h_{ii} gleich oder die drei Hauptkongruenzen V_2-normal sein müssen.[33])

Es gilt also der Satz:

Eine V_n in einer R_{n+1} kann für $n > 3$ nur dann konformeuklidisch sein, wenn in jedem Punkte wenigstens $n-1$ der Größen h_{ii} gleich sind. Für $n = 3$ kann sie es auch dann sein, wenn die Hauptkongruenzen V_2-normal sind.

---

[31]) Vgl. z. B. Ricci, Rend. dei Lincei, **11**. 1 (1902), S. 355–362.

[32]) A. S. 1 a. O.

[33]) Ricci hat noch eine andere Bedingung aufgestellt. Damit eine V_3 conformeuklidisch sei ist notwendig und hinreichend, daß sie ein dreifaches Orthogonalsystem $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ enthält, daß den Gleichungen $\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \frac{1}{\lambda} \nabla \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_3 \frac{1}{\lambda} \nabla \mathbf{i}_3$, cycl. genügt. (Sulla determinazioni di varietà usw. Rend. d. Linc. **19.** 1 (1910) S. 181–187). Diese Bedingung ist auch notwendig und hinreichend für eine V_n. Die Gleichungen müssen dann für jede beliebige Wahl von drei Indices gelten. Auch für n allgemein sind die Kongruenzen des Orthogonalsystems die Parameterlinien der Urvariablen in bezug auf welche das Linienelement die Form $ds^2 = \sigma \, dx^\lambda \, dx^\lambda$ hat.

(Eingegangen am 14. Mai 1920.)

Über eine partikuläre Lösung des biharmonischen Problems für den Außenraum der Ellipse.

Von

Theodor Pöschl in Prag.

1. Vorbemerkung.

Im Anschluß an die einschlägigen Arbeiten von Maxwell hat Klein schon vor längerer Zeit eine geometrische Auffassung zur Lösung n „ebenen" Spannungsaufgaben gegeben, die daraufhin von einigen seiner hüler, insbesondere von Wieghardt[1]) und Timpe[2]) ausführlich dargestellt d an vielen Beispielen erläutert wurde. Insbesondere hat F. Klein zeigt, daß die Aufgabe, die Spannungsverteilung zu finden, welche in einer nfach zusammenhängenden, homogenen, elastisch-isotropen Scheibe durch n am Rand angreifendes Gleichgewichtssystem von Kräften erzeugt wird, ntisch ist mit der Aufgabe: Man konstruiere zunächst die — bis auf ne beliebig hinzuzufügende Ebene völlig bestimmte — (abwickelbare) ußere Belastungsfläche"[3]) und sodann diejenige Fläche $\psi = \psi(x, y)$, die h über den Scheibenrand überall stetig und ohne Knick an diese Fläche schließt, und über dem Innern der Scheibe überall der Differentialglei- ung $\Delta\Delta\psi = 0$ genügt; die Spannungen selbst sind dann gegeben durch e Gleichungen:

$$X_x = \psi_{yy}, \quad Y_y = \psi_{xx}, \quad X_y = -\psi_{xy}. \tag{)}$$

[1]) Vgl. Klein und Wieghardt, Über Spannungsflächen und reziproke Dia- mme, mit besonderer Berücksichtigung der Maxwellschen Arbeiten. Archiv d. th. III. Reihe, 8 (1904), S. 1 und 95 und die dort angegebene Literatur.

[2]) Probleme der Spannungsverteilung in einem System, einfach gelöst mit Hilfe Airyschen Spannungsfunktion, Zeitschr. f. Math., 52 (1905), S. 348.

[3]) Dieser Ausdruck wurde von P. Funk eingeführt, vgl. dessen Arbeiten: Über e geometrische Auffassung bei Aufgaben über Fachwerke, Sitzungsberichte d. ener Ak. d. W., IIa, 127 (1918), S. 1 und dessen Buch: Die linearen Differenzen- ichungen u. ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen, Berlin, inger, 1920. Herrn Dr. Funk habe ich auch einige Hinweise zu verdanken, die bei der Ausführung dieser Arbeit von Nutzen waren.

Die Funktion $\psi = \psi(x, y)$ wird die zu dem Problem gehörige Airysche Funktion genannt.

Nach dieser Methode ist es leicht, die Airysche Funktion für den Fall eines kreisförmigen Loches in einer unendlich ausgedehnten Platte anzugeben, wie dies zuerst von Föppl[4]) geschehen ist. Die vorliegende Arbeit enthält die Lösung für das analoge Problem des *elliptischen* Loches in einer unendlich ausgedehnten Scheibe und zwar für *beliebige* Neigung der Zugrichtung gegen die Achsen der Ellipse. Hierzu verwenden wir naturgemäß elliptische Koordinaten und entwickeln zu Beginn die Ausdrücke für die durch die Airysche Funktion ausgedrückten Spannungskomponenten in orthogonalen krummlinigen Koordinaten, die sich durch Verwendung der üblichen invarianten Schreibweise in einfachster Art ergeben; die betreffenden Ausdrücke für die Spannungskomponenten sind übrigens zuerst von Michell[5]) angegeben worden.

2. Die Spannungskomponenten in orthogonalen krummlinigen Koordinaten.

Wir setzen zunächst allgemein einen n-dimensionalen Raum voraus und legen das Bogenelement durch den folgenden Ausdruck fest[6]):

$$ds^2 = a_{ik}\, dx^{(i)}\, dx^{(k)}; \tag{2}$$

ferner sei X_{ij} das zu diesem ds^2 kovariante doppelt symmetrische System — d. h. der Spannungstensor, — das die Spannungen auf die Seitenflächen des infinitesimalen Polytops gibt, welches durch die Hyperflächen $x^{(1)} = \text{konst.}$, $x^{(1)} + dx^{(1)} = \text{konst.}$, ..., $x^{(n)} = \text{konst.}$, $x^{(n)} + dx^{(n)} = \text{konst.}$ begrenzt wird. Bezeichnen ferner X_{ijl} die kovarianten ersten Ableitungen von X_{ij} nach $x^{(l)}$, weiters F_i die Komponenten der Massenkräfte nach den $x^{(i)}$, und ϱ die Dichte, dann schreiben sich die Gleichgewichtsbedingungen im System der $x^{(i)}$, wie Ricci[7]) gezeigt hat, in folgender kovarianter Form:

$$\varrho F_i + a^{(jl)} X_{ijl} = 0; \tag{3}$$

wie üblich bedeutet dabei $a^{(jl)}$ das durch $a \equiv |a_{jl}|$ dividierte algebraische Komplement von a_{jl} in der Determinante a; und also

$$X_{ijl} = \frac{\partial X_{ij}}{\partial x_l} - \left\{ \begin{matrix} il \\ q \end{matrix} \right\} X_{qj} - \left\{ \begin{matrix} jl \\ q \end{matrix} \right\} X_{iq}. \tag{4}$$

---

[4]) S. etwa: Drang und Zwang **1**, S. 304–306.

[5]) Proc. Lond. Math. Soc., **31** (1900), S. 100–124.

[6]) Über gleiche Indizes ist — wie üblich — stets zu summieren.

[7]) Delle Derivatione covarianti e contravarianti e del loro uso nella analisi applicata, Studi offerti dalla Università Padovana alla Bolognese nell'ottavo centenario ecc., **3** (1888), S. 1–23. Vgl. auch Ricci u. Levi-Civita, Methodes de calcul differentiel absolu et leurs applications, Math. Ann., **54** (1899), S. 125.

Für den Fall zweier Dimensionen und unter Annahme fehlender Massenkräfte und orthogonaler Koordinaten, auf den wir im folgenden Bezug nehmen, erhalten wir die zwei Gleichungen:

$$5) \qquad \begin{cases} a^{(11)} X_{111} + a^{(22)} X_{122} = 0, \\ a^{(11)} X_{211} + a^{(22)} X_{222} = 0. \end{cases}$$

Ebenso wie bei rechtwinkligen kartesischen Koordinaten läßt sich durch Ausführung der angegebenen Operationen erkennen, daß die drei Größen X_{11}, $X_{12} = X_{21}$ und X_{22} durch die zweiten *kovarianten Ableitungen* einer Airyschen Spannungsfunktion $\psi \equiv \psi(x^{(1)}, x^{(2)})$ in folgender Form dargestellt werden können:

$$6) \qquad X_{11} = \frac{a^{(22)}}{a^{(11)}} \psi_{22}, \quad X_{22} = \frac{a^{(11)}}{a^{(22)}} \psi_{11}, \quad X_{12} = -\psi_{12}.$$

Schreiben wir für die krummlinigen Koordinaten $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ jetzt ξ und η, und für die Spannungskomponenten selbst (in der Loveschen Bezeichnungsweise) $\widehat{\xi\xi}$, $\widehat{\eta\eta}$, $\widehat{\xi\eta}$, so hängen diese mit den X_{ij} wie folgt zusammen[8]):

$$7) \qquad \begin{cases} \widehat{\xi\xi} = a^{(11)} X_{11} = a^{(22)} \psi_{22}, \quad \widehat{\eta\eta} = a^{(22)} X_{22} = a^{(11)} \psi_{11}, \\ \widehat{\xi\eta} = \sqrt{a^{(11)} a^{(22)}}\, X_{12} = -\sqrt{a^{(11)} a^{(22)}}\, \psi_{12}, \end{cases}$$

und dabei ist zu setzen

$$8) \qquad \psi_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} - \left\{ \begin{matrix} ij \\ q \end{matrix} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial x_q}.$$

Die durch (7) gegebenen Ausdrücke ergeben sich auch direkt durch kovariante Ausführung der in (1) gegebenen zweiten Differentialquotienten. Ausführlich geschrieben lauten die Ausdrücke für die Spannungskomponenten durch die Spannungsfunktion ψ (vgl. Michell a. a. O.), wenn wir noch $a_{11} = h_1^2$, $a_{22} = h_2^2$ setzen,

$$9) \qquad \begin{cases} \widehat{\xi\xi} = \dfrac{1}{h_2^2} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \dfrac{1}{h_1^2 h_2} \dfrac{\partial h_2}{\partial \xi} \dfrac{\partial \psi}{\partial \xi} - \dfrac{1}{h_2^3} \dfrac{\partial h_2}{\partial \eta} \dfrac{\partial \psi}{\partial \eta}, \\ \widehat{\eta\eta} = \dfrac{1}{h_1^2} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \dfrac{1}{h_1^3} \dfrac{\partial h_1}{\partial \xi} \dfrac{\partial \psi}{\partial \xi} + \dfrac{1}{h_1 h_2^2} \dfrac{\partial h_1}{\partial \eta} \dfrac{\partial \psi}{\partial \eta}, \\ \widehat{\xi\eta} = -\dfrac{1}{h_1 h_2} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \dfrac{1}{h_1^2 h_2} \dfrac{\partial h_1}{\partial \eta} \dfrac{\partial \psi}{\partial \xi} + \dfrac{1}{h_1 h_2^2} \dfrac{\partial h_2}{\partial \xi} \dfrac{\partial \psi}{\partial \eta}. \end{cases}$$

[8]) Die ersten Teile der Gleichungen (7) (ohne Bezugnahme auf die Spannungsfunktion) sind schon von Beltrami gegeben worden: Sull' uso delle coordinate curvilinee, Mem. dell' Acc. di Bologna, Serie IV, t. VI, S. 401—448. S. auch Ricci, a. a. O. S. 21 (S. Anm. [7]), Delle Derivatione ...).

Beiläufig sei bemerkt, daß die durch die Gleichungen (6) gegebene Darstellung der Spannungskomponenten durch die kovarianten Ableitungen einer bestimmten Funktion ψ nur dann möglich ist, wenn das Krümmungsmaß von (2) identisch verschwindet.

Ähnlich wie für den Fall kartesischer Koordinaten läßt sich auch für beliebige Koordinaten ξ, η zeigen, daß $\psi = \psi(\xi, \eta)$ im ganzen Gebiete der Gleichung $\Delta\Delta\psi = 0$ genügt, welche Gleichung in den Koordinaten ξ und η zu schreiben ist.

3. Lösung der Spannungsaufgabe für das elliptische Loch.

In einem unendlich ausgedehnten Blech sei ein Loch in der Form einer Ellipse vorhanden, deren Achsen wir mit x, y bezeichnen (Fig. 1).

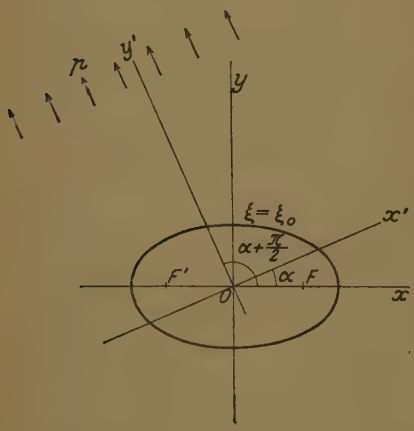

Fig. 1.

Die Belastung sei im Unendlichen ein einfacher Zug, der gegen die große Achse unter dem Winkel $\alpha + \frac{\pi}{2}$ geneigt ist. Naturgemäß führen wir elliptische Koordinaten ein durch die komplexe Funktion:

$$(10) \qquad x + iy = c\,\mathfrak{Cof}(\xi + i\eta),$$

so daß

$$(10) \qquad \begin{cases} x = c\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta, \\ y = c\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta. \end{cases}$$

In diesem Falle ist

$$h_1^2 = h_2^2 = \frac{c^2}{2}(\mathfrak{Cof}\,2\xi - \cos 2\eta),$$

und die Gleichung $\Delta\Delta\psi = 0$ nimmt, wenn

$$\psi_{\xi\xi} + \psi_{\eta\eta} = \Delta^*\psi$$

gesetzt wird, die Form an:

$$(11) \qquad \Delta\Delta\psi = \frac{4}{c^4(\mathfrak{Cof}\,2\xi - \cos 2\eta)^3}\Big[(\mathfrak{Cof}\,2\xi - \cos 2\eta)\,\Delta^*\Delta^*\psi$$
$$- 4\left(\mathfrak{Sin}\,2\xi\frac{\partial\Delta^*\psi}{\partial\xi} + \sin 2\eta\frac{\partial\Delta^*\psi}{\partial\eta}\right) + 4(\mathfrak{Cof}\,2\xi + \cos 2\eta)\,\Delta^*\psi\Big].$$

Die gegebene Ellipse sei durch den Wert $\xi = \xi_0$ gekennzeichnet. Wir denken uns unter dem Winkel α gegen die x-Achse die x'-Achse eines neuen Systems (x', y') gelegt, dann wird der angegebenen Belastung der folgende Ansatz für die Spannungsfunktion im Unendlichen entsprechen:

$$\psi \to \frac{p}{2}x'^2 = \frac{p}{2}(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2,$$

der in den neuen Koordinaten ξ, η geschrieben (für $\xi \to \infty$)

12) $$\psi \to \frac{p}{16} c^2 e^{2\xi} [1 + \cos 2(\eta - \alpha)].$$

Im Unendlichen muß sonach die Differenz der zweiten kovarianten Ableitungen der gesuchten Funktion und der zweiten Ableitungen von (12) gegen Null konvergieren.

Als weitere Grenzbedingungen sind ferner in Übereinstimmung mit der in der Vorbemerkung angegebenen Methode die folgenden anzusetzen, da im Innern des elliptischen Loches keine Spannungen herrschen, dort also die äußere Belastungsfläche eine Ebene ist,

13) $$\psi = \text{konst. und } \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0 \text{ für } \xi = \xi_0 \text{ [9]}.$$

Was die gesuchte Lösung betrifft, so ist von vornherein zu erwarten, daß sie sich nur aus Funktionen von der Form

$$F_1(\xi) + F_2(\xi) \cos 2\eta + F_3(\xi) \sin 2\eta$$

zusammensetzen wird, somit kommen nur die folgenden Potentiale

$$\xi, \quad \mathfrak{Cof}\, 2\xi \cos 2\eta, \quad \mathfrak{Sin}\, 2\xi \cos 2\eta, \quad \mathfrak{Cof}\, 2\xi \sin 2\eta, \quad \mathfrak{Sin}\, 2\xi \sin 2\eta$$

und die folgenden Bipotentiale

$$\mathfrak{Cof}\, 2\xi + \cos 2\eta \ (\sim r^2), \quad \mathfrak{Sin}\, 2\xi, \quad \sin 2\eta$$

in Betracht, wobei die zwei letzteren, wie man leicht bestätigt, die einzigen Lösungen von (11) sind, die nur von je einer der beiden Veränderlichen ξ und η abhängen und nicht zugleich auch eigentliche Potentiale sind.

Die durch (12) und (13) gegebenen Grenzbedingungen führen unmittelbar auf die folgende Form von ψ:

14) $$\psi = \frac{pc^2}{8} \{ \mathfrak{Sin}\, 2\xi - \cos 2\alpha e^{-2(\xi - \xi_0)} - 2(\mathfrak{Cof}\, 2\xi_0 + \cos 2\alpha)\xi + [\mathfrak{Cof}\, 2(\xi - \xi_0) - 1] e^{2\xi_0} \cos 2(\eta - \alpha) \}.$$

Von besonderem Interesse ist nun die Größe der sogenannten *Tangentialspannung* längs des elliptischen Loches, die sich nach (9) für $\xi = \xi_0$ in folgender Gestalt ergibt[10]):

15) $$\widehat{\eta\eta} = p \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\, 2\xi_0 - \cos 2\alpha e^{2\xi_0} + \cos 2(\eta - \alpha)}{\mathfrak{Cof}\, 2\xi_0 - \cos 2\eta}.$$

[9]) Nach den üblichen Methoden wäre noch der Eindeutigkeitsbeweis zu erringen, doch glauben wir dies hier übergehen zu können.

[10]) Die von G. Kolosoff in seiner Arbeit: Über einige Eigenschaften des ebenen Problems der Elastizitätstheorie [Z. f. Math. 62 (1904), S. 384—409], S. 404 auf schwer kontrollierbarem Wege für den Sonderfall $\alpha = 0$ gefundene Formel stimmt mit Gl. (15) nicht überein und dürfte unrichtig sein.

Wie man leicht nachrechnet, treten die größten Werte von $\widehat{\eta\eta}$ nur für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ in den Endpunkten der großen Achsen der betreffenden Ellipsen auf, für andere Werte von α liegen die Maxima nicht mehr in diesen

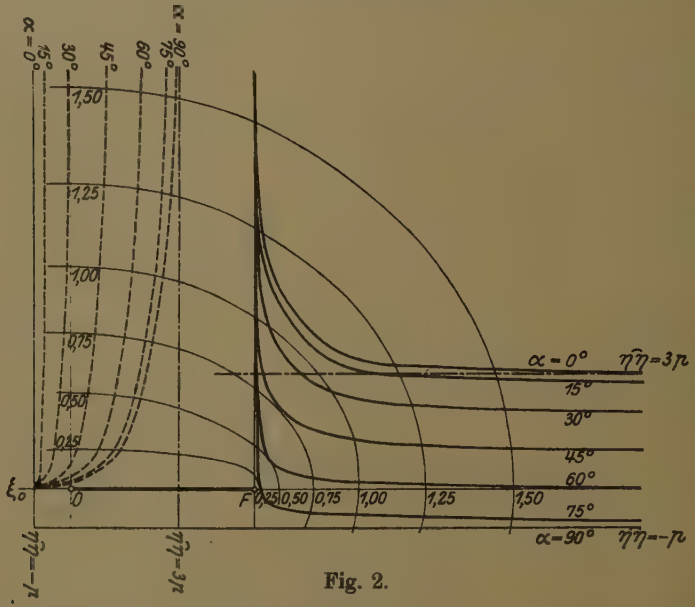

Fig. 2.

Punkten. In Fig. 2 sind die Werte von $\widehat{\eta\eta}$ in den Endpunkten der Achsen der Ellipsen aufgetragen, und zwar für verschiedene Werte des Winkels α. Aus dieser Figur ist ersichtlich, daß sich die großen Ellipsen wie Kreise verhalten, die Spannung an den Endpunkten ihrer großen Achsen ist (wie beim kreisförmigen Loch, s. u.) $3p$, an den Endpunkten der kleinen Achsen $-p$. Mit zunehmender Schlankheit der Ellipsen nehmen diese Werte an den Endpunkten der großen Achsen fortgesetzt über alle Grenzen zu.

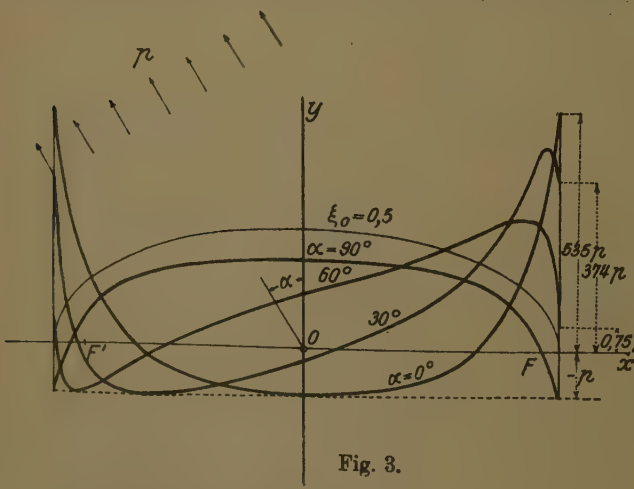

Fig. 3.

In Fig. 3 ist die Spannungsverteilung längs des Umfanges der Ellipse $\xi_0 = 0{,}5$ für verschiedene Werte des Winkels α als Funktion der Abszissen aufgetragen.

Für $\xi_0 = 0$ erhalten wir den
all des unendlich schmalen
chlitzes, für den überdies in
g. 4 die Spannungsverteilung
ngs des Randes für mehrere
erte von α noch besonders
erausgezeichnet ist. Im End-
nkt des Schlitzes ($\eta = 0$) er-
bt sich, was vorauszusehen ist,
r alle Werte von α: $\widehat{\eta\eta} = \infty$
ßer für $\alpha = 90^0$, d. h. wenn
r Schlitz parallel zur Zug-
chtung ist, für welchen Fall
$\widehat{\eta} = p$ folgt. Für $\alpha = 0$ ist
$\widehat{\eta} = -1$, nur an den End-
nkten folgt $\widehat{\eta\eta} = \infty$.

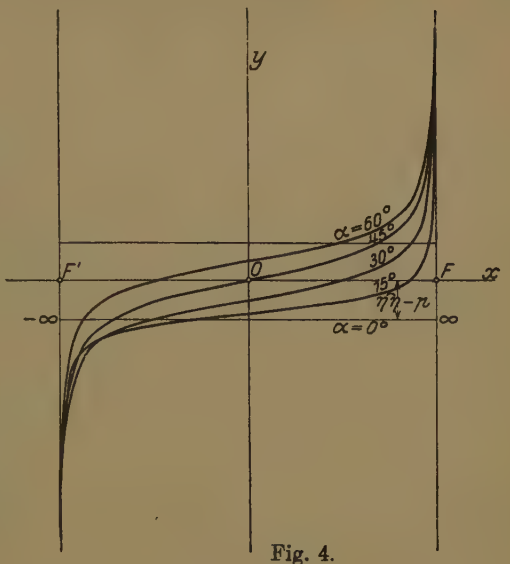

Fig. 4.

4. Allseitiger Zug.

Denken wir uns zwei Spannungszustände übereinandergelagert, die
n Werten der Funktion ψ nach (14) für α und $\alpha + \frac{\pi}{2}$ entsprechen, so
hält die Spannungsfunktion, die jetzt mit ψ_1 bezeichnet werde im Un-
dlichen den Wert

$$\psi_1 \to \frac{p}{2} r^2, \quad \text{d. h.} \quad \psi_1 \to \frac{pc^2}{8} e^{2\xi}.$$

ie Addition der betreffenden Werte von ψ liefert unmittelbar den ein-
chen Ausdruck

6) $$\psi_1 = \frac{pc^2}{4} \{ \mathfrak{Sin}\, 2\xi - 2\, \mathfrak{Cof}\, 2\xi_0 \cdot \xi \},$$

so unabhängig von η, während die Spannungskomponenten selbst wieder
rch die Gleichungen (9) gegeben sind und von η abhängig bleiben.

5. Übergang zum kreisförmigen Loch.

Um aus (14) die analoge Form von ψ für den Fall des kreisförmigen
ches vom Halbmesser a zu erhalten, ist es erforderlich, den Grenz-
ergang für $c \to 0$ auszuführen und dabei $\xi \to \infty$ werden zu lassen, so
ß gleichzeitig die folgenden Bedingungen erfüllt sind

$$\lim c^2\, \mathfrak{Sin}\, 2\xi = \lim c^2\, \mathfrak{Cof}\, 2\xi = 2r^2$$

d ebenso

$$\lim c^2\, \mathfrak{Sin}\, 2\xi_0 = \lim c^2\, \mathfrak{Cof}\, 2\xi_0 = 2a^2;$$

bei diesem Grenzübergang wird $\eta \to \varphi$, so daß r und φ Polarkoordinaten darstellen und

$$\xi \to 2 \log r,$$

ferner folgt

$$c^2 [\mathfrak{Cof} 2(\xi - \xi_0) - 1] e^{2\xi_0} = \frac{c^4}{2} \cdot \frac{e^{4\xi} - 2e^{2\xi_0} \cdot e^{2\xi} + e^{4\xi_0}}{c^2 e^{2\xi}},$$

und dies wird in der Grenze

$$2 \frac{(r^2 - a^2)^2}{r^2};$$

also folgt aus (14) der bekannte Ausdruck für den Fall des kreisförmigen Loches

$$\psi = \frac{p}{4} \left\{ r^2 - 2a^2 \log r + \frac{(r^2 - a^2)^2}{r^2} \cos 2(\eta - \alpha) \right\}. \tag{17}$$

(Eingegangen am 6. Juli 1920).

ie Form des Wirkungsprinzips bei der Bewegung starrer Körper aus Invarianzforderungen abgeleitet.

Von

Gertrud Weyl in Breslau.

Kneser hat in seiner Abhandlung „Kleinste Wirkung und Galileische lativität“[1]) gezeigt, daß sich gewisse Ansätze der reinen Mechanik aus varianzforderungen allein, ohne Heranziehung der Newtonschen Gesetze leiten lassen. Wenn man nämlich das Integral über die zunächst unkannte Wirkungsfunktion längs einer Kurve bei vorgeschriebenen Anfangsd Endwerten der Koordinaten und der Zeit variiert, und vorschreibt, ß diese Variation gegenüber bestimmten Transformationsgruppen invariant ibt, so ergeben sich bei gewissen Bewegungen einzelner materieller nkte Bedingungsgleichungen für die Wirkungsfunktion H, aus denen h ihre Gestalt bestimmt.

Im folgenden ist der Versuch unternommen, auf diesem Wege die chanik des Systems fest miteinander verbundener Punkte in der Ebene, o der starren Scheibe herzuleiten. Während Kneser bei der Begründung r Punktmechanik nur die Gruppe der Galilei-Transformationen und die tlosen Drehungen des Koordinatensystems benutzt, muß für das System ch die Gruppe der Drehungen desselben um einen seiner Punkte mit nstanter Winkelgeschwindigkeit herangezogen werden.

Ein beliebiger Punkt einer starren Scheibe, die in der x, y-Ebene weglich ist, habe die Koordinaten (x, y); eine durch ihn gehende, in r Scheibe feste Gerade bilde mit der x-Achse den Winkel ϑ; damit ist Lage der Scheibe durch x, y, ϑ bestimmt.

Die Wirkungsfunktion hängt von diesen Lagekoordinaten x, y, ϑ und n entsprechenden Geschwindigkeiten $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\vartheta}$ ab, enthält aber die Zeit ht explizite; sie kann daher in der Form:

$$H(x, y, \vartheta; \dot{x}, \dot{y}, \vartheta)$$

schrieben werden.

[1]) Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 326–349.

Ich untersuche jetzt die Invarianzbedingungen für H bei Galilei-Transformation (I), bei Drehung des Koordinatensystems um seinen Anfangspunkt (II), bei Drehung der Scheibe um einen ihrer Punkte mit konstanter Winkelgeschwindigkeit (III).

Die Invarianzforderungen lassen sich formulieren: Wenn die Größen $x, y, \vartheta; \dot{x}, \dot{y}, \dot{\vartheta}$ infolge der vorgeschriebenen Transformation in $\bar{x}, \bar{y}, \bar{\vartheta}; \dot{\bar{x}}, \dot{\bar{y}}, \dot{\bar{\vartheta}}$ übergehen, so soll die Gleichung

$$\delta\int\{H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\vartheta}; \dot{\bar{x}}, \dot{\bar{y}}, \dot{\bar{\vartheta}}) - H(x, y, \vartheta; \dot{x}, \dot{y}, \dot{\vartheta})\}\,dt \equiv 0$$

für jedes Wertsystem der Größen x, y, ϑ als willkürlicher Funktionen von t gelten.

I. Galilei-Transformation.

Eine Verschiebung parallel der x-Achse mit unendlich kleiner konstanter Geschwindigkeit ε führt $H(x, y, \vartheta; \dot{x}, \dot{y}, \dot{\vartheta})$ über in

$$H(x, y, \vartheta; \dot{x}, \dot{y}, \dot{\vartheta}) + \varepsilon(tH_x + H_{\dot{x}});$$

entsprechend bewirkt eine Verschiebung parallel der y-Achse den Übergang von $H(x, y, \vartheta; \dot{x}, \dot{y}, \dot{\vartheta})$ in

$$H(x, y, \vartheta; \dot{x}, \dot{y}, \dot{\vartheta}) + \varepsilon(tH_y + H_{\dot{y}}).$$

Mithin besagt die Forderung (I)

$$\text{(I)} \qquad \delta\int(tH_x + H_{\dot{x}})\,dt \equiv 0, \qquad \delta\int(tH_y + H_{\dot{y}})\,dt \equiv 0.$$

Die Eulerschen Gleichungen müssen identisch erfüllt sein; d. h. auch wenn x, y, ϑ willkürliche Funktionen von t sind:

$$(\mathrm{I}^a)_1 \qquad (tH_x + H_{\dot{x}})_\xi - \frac{d}{dt}[(tH_x + H_{\dot{x}})_{\dot{\xi}}] \equiv 0,$$

$$(\mathrm{I}^b)_1 \qquad (tH_y + H_{\dot{y}})_\xi - \frac{d}{dt}[(tH_y + H_{\dot{y}})_{\dot{\xi}}] \equiv 0.$$

Hierbei bedeutet eine angeheftete Variable die Differentiation nach dieser Variablen. Der Buchstabe ξ bezeichne der Reihe nach die Veränderlichen x, y, ϑ.

Ordnet man die Differentialgleichungen nach Potenzen von t, so erhält man:

$$(\mathrm{I}^a)_2 \qquad t\left(H_{x\xi} - \frac{d}{dt}H_{x\dot{\xi}}\right) + \left(H_{\dot{x}\xi} - H_{x\dot{\xi}} - \frac{d}{dt}H_{\dot{x}\dot{\xi}}\right) \equiv 0,$$

$$(\mathrm{I}^b)_2 \qquad t\left(H_{y\xi} - \frac{d}{dt}H_{y\dot{\xi}}\right) + \left(H_{\dot{y}\xi} - H_{y\dot{\xi}} - \frac{d}{dt}H_{\dot{y}\dot{\xi}}\right) \equiv 0.$$

Da H die Variable t nicht enthält, müssen die Faktoren der Potenzen von t identisch verschwinden, damit die Eulerschen Gleichungen für jeden

rt von t und willkürliche Funktionen ξ erfüllt sind, somit ergibt sich:

$$H_{xx} - \frac{d}{dt}H_{x\dot{x}} \equiv 0, \qquad (\mathrm{I})_4 \qquad \frac{d}{dt}H_{\dot{x}\dot{x}} \equiv 0,$$

$$H_{xy} - \frac{d}{dt}H_{x\dot{y}} \equiv 0, \qquad H_{\dot{x}y} - H_{x\dot{y}} - \frac{d}{dt}H_{\dot{x}\dot{y}} \equiv 0,$$

$$H_{x\vartheta} - \frac{d}{dt}H_{x\dot{\vartheta}} \equiv 0, \qquad H_{\dot{x}\vartheta} - H_{x\dot{\vartheta}} - \frac{d}{dt}H_{\dot{x}\dot{\vartheta}} \equiv 0,$$

$$H_{yx} - \frac{d}{dt}H_{y\dot{x}} \equiv 0, \qquad H_{\dot{y}x} - H_{y\dot{x}} - \frac{d}{dt}H_{\dot{y}\dot{x}} \equiv 0,$$

$$H_{yy} - \frac{d}{dt}H_{y\dot{y}} \equiv 0, \qquad \frac{d}{dt}H_{\dot{y}\dot{y}} \equiv 0,$$

$$H_{y\vartheta} - \frac{d}{dt}H_{y\dot{\vartheta}} \equiv 0, \qquad H_{\dot{y}\vartheta} - H_{y\dot{\vartheta}} - \frac{d}{dt}H_{\dot{y}\dot{\vartheta}} \equiv 0.$$

hrt man die totalen Differentiationen nach t aus, so nehmen die eichungen $(\mathrm{I})_3$ und $(\mathrm{I})_4$ die folgende Gestalt an:

$$H_{xx} - H_{x\dot{x}x}\dot{x} - H_{x\dot{x}y}\dot{y} - H_{x\dot{x}\vartheta}\dot{\vartheta} - H_{x\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} - H_{x\dot{x}\dot{y}}\ddot{y} - H_{x\dot{x}\dot{\vartheta}}\ddot{\vartheta} \equiv 0;$$

usw.

$$H_{\dot{x}\dot{x}x}\dot{x} + H_{\dot{x}\dot{x}y}\dot{y} + H_{\dot{x}\dot{x}\vartheta}\dot{\vartheta} + H_{\dot{x}\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} + H_{\dot{x}\dot{x}\dot{y}}\ddot{y} + H_{\dot{x}\dot{x}\dot{\vartheta}}\ddot{\vartheta} \equiv 0,$$

usw.

diese Gleichungen für jede Wahl von $\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}$ gelten, da ferner die nktionen $\ddot{\xi}$ in H nicht auftreten, so müssen die Faktoren der linear tretenden Größen $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\vartheta}$ verschwinden:

$$H_{\dot{x}\dot{x}x} \equiv H_{x\dot{x}\dot{y}} \equiv H_{x\dot{x}\dot{\vartheta}} \equiv H_{x\dot{y}\dot{y}} \equiv H_{x\dot{y}\dot{\vartheta}} \equiv 0;$$

$$H_{y\dot{x}\dot{x}} \equiv H_{y\dot{x}\dot{y}} \equiv H_{y\dot{x}\dot{\vartheta}} \equiv H_{y\dot{y}\dot{y}} \equiv H_{y\dot{y}\dot{\vartheta}} \equiv 0;$$

$$H_{\dot{x}\dot{x}\dot{x}} \equiv H_{\dot{x}\dot{x}\dot{y}} \equiv H_{\dot{x}\dot{x}\dot{\vartheta}} \equiv H_{\dot{x}\dot{y}\dot{y}} \equiv H_{\dot{x}\dot{y}\dot{\vartheta}} \equiv 0;$$

$$H_{\dot{x}\dot{\vartheta}\dot{y}} \equiv H_{\dot{x}\dot{\vartheta}\dot{\vartheta}} \equiv H_{\dot{y}\dot{\vartheta}\dot{\vartheta}} \equiv H_{\dot{y}\dot{y}\dot{y}} \equiv H_{\dot{y}\dot{y}\dot{\vartheta}} \equiv 0.$$

s den Bedingungen

$$H_{\dot{x}\dot{x}x} \equiv H_{\dot{x}\dot{x}y} \equiv H_{\dot{x}\dot{x}\vartheta} \equiv H_{\dot{x}\dot{x}\dot{x}} \equiv H_{\dot{x}\dot{x}\dot{y}} \equiv H_{\dot{x}\dot{x}\dot{\vartheta}} \equiv 0$$

gt, daß $H_{\dot{x}\dot{x}}$ konstant ist.

Ebenso kann man aus den obigen Gleichungen $(\mathrm{I})_6$, $(\mathrm{I})_5$ folgern, daß Funktionen $H_{\dot{y}\dot{y}}$, $H_{y\dot{x}}$ konstant sind, $H_{\dot{x}\dot{\vartheta}}$, $H_{\dot{y}\dot{\vartheta}}$ nur ϑ enthalten, daß $_{\dot{x}\dot{\vartheta}}$ nur von $\vartheta, \dot{\vartheta}$ abhängt, während die Ausdrücke $H_{x\dot{x}}$, $H_{x\dot{y}}$, $H_{x\dot{\vartheta}}$, $H_{y\dot{x}}$, $_{\dot{y}}$, $H_{y\dot{\vartheta}}$ die Größen $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\vartheta}$ nicht enthalten. Da die Reihenfolge der rtiellen Differentiationen vertauschbar ist, also z. B. $\frac{\partial}{\partial y}(H_{x\dot{x}}) = \frac{\partial}{\partial x}(H_{y\dot{x}})$,

so gibt es drei solche Funktionen $B^{(\nu)}(x, y, \vartheta)$, daß

$$(\mathrm{I})_7 \qquad \begin{aligned} H_{x\dot{x}} &= B_x^{(1)}(x, y, \vartheta), & H_{y\dot{x}} &= B_y^{(1)}(x, y, \vartheta), \\ H_{x\dot{y}} &= B_x^{(2)}(x, y, \vartheta), & H_{y\dot{y}} &= B_y^{(2)}(x, y, \vartheta), \\ H_{x\dot{\vartheta}} &= B_x^{(3)}(x, y, \vartheta), & H_{y\dot{\vartheta}} &= B_y^{(3)}(x, y, \vartheta). \end{aligned}$$

Aus den abgeleiteten Beziehungen ergibt sich die folgende Form der Wirkungsfunktion, in der durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ Konstante bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} (\mathrm{I})_8 \qquad H = {} & \tfrac{1}{2}\alpha_1 \dot{x}^2 + \alpha_2 \dot{x}\dot{y} + \tfrac{1}{2}\alpha_3 \dot{y}^2 + A_1(\vartheta)\dot{x}\dot{\vartheta} + A_2(\vartheta)\dot{y}\dot{\vartheta} \\ & + B^{(1)}(x, y, \vartheta)\dot{x} + B^{(2)}(x, y, \vartheta)\dot{y} + B^{(3)}(x, y, \vartheta)\dot{\vartheta} \\ & + C(\vartheta, \dot{\vartheta}) + D(x, y, \vartheta). \end{aligned}$$

Führt man diesen Ausdruck für H in die Gleichungen $(\mathrm{I})_4$ ein, so erhält man neue Bedingungen für die Funktionen $B^{(1)}$, $B^{(2)}$ und $B^{(3)}$:

$$\begin{aligned} (\mathrm{I})_9 \qquad & B_y^{(1)}(x, y, \vartheta) - B_x^{(2)}(x, y, \vartheta) \equiv 0, \\ & B_\vartheta^{(1)}(x, y, \vartheta) + A_1'(\vartheta)\cdot\dot{\vartheta} - B_x^{(3)}(x, y, \vartheta) - A_1'(\vartheta)\cdot\dot{\vartheta} \equiv 0, \\ & B_\vartheta^{(2)}(x, y, \vartheta) + A_2'(\vartheta)\cdot\dot{\vartheta} - B_y^{(3)}(x, y, \vartheta) - A_2'(\vartheta)\cdot\dot{\vartheta} \equiv 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind die Integrabilitätsbedingungen für den Ausdruck $B^{(1)}(x, y, \vartheta)\dot{x} + B^{(2)}(x, y, \vartheta)\dot{y} + B^{(3)}(x, y, \vartheta)\dot{\vartheta}$. Man kann ihn also gleich dem totalen Differentialquotienten $\frac{dB}{dt}$ einer Funktion $B(x, y, \vartheta)$ setzen. Diese Größe $\frac{dB}{dt}$ kann als unbestimmt integrierbar aus der Wirkungsdichte weggelassen werden.

Die Gleichungen $(\mathrm{I})_3$ liefern jetzt eine genauere Bestimmung für $D(x, y, \vartheta)$:

$$(\mathrm{I})_{10} \qquad D_{xx} = 0, \quad D_{xy} = 0, \quad D_{x\vartheta} = 0, \quad D_{yy} = 0, \quad D_{y\vartheta} = 0,$$

also

$$D = \delta_1 x + \delta_2 y + D(\vartheta),$$

wobei δ_1 und δ_2 konstant sind.

Damit $\delta \int H\,dt$ gegenüber den Galilei-Transformationen der Ebene invariant sei, muß also H die Form haben

$$\begin{aligned} (\mathrm{I})_{11} \qquad H(x, y, \vartheta; \dot{x}, \dot{y}, \dot{\vartheta}) = {} & \tfrac{\alpha_1}{2}\dot{x}^2 + \alpha_2 \dot{x}\dot{y} + \tfrac{\alpha_3}{2}\dot{y}^2 \\ & + A_1(\vartheta)\dot{x}\dot{\vartheta} + A_2(\vartheta)\dot{y}\dot{\vartheta} + C(\vartheta, \dot{\vartheta}) \\ & + \delta_1 x + \delta_2 y + D(\vartheta), \end{aligned}$$

wobei α, δ Konstante sind.

II. Drehung des Koordinatensystems.

Eine Drehung des Koordinatensystems um den Winkel ε erteilt der rkungsfunktion den Zuwachs $\varepsilon(-yH_x+xH_y+H_\vartheta-\dot{y}H_{\dot{x}}+\dot{x}H_{\dot{y}})$. so kann man die zweite der Invarianzforderungen durch die folgende ntität darstellen:

$$\text{I)} \qquad \delta\int(-yH_x+xH_y+H_\vartheta-\dot{y}H_{\dot{x}}+\dot{x}H_{\dot{y}})\,dt\equiv 0.$$

gelten daher die Eulerschen Gleichungen für jeden Wert von t und jede Wahl der Funktionen x, y, ϑ; d. h. für $\xi = x, y, \vartheta$ gelten die ntitäten

$$\text{I)}_1 \qquad (-yH_x+xH_y+H_\vartheta-\dot{y}H_{\dot{x}}+\dot{x}H_{\dot{y}})_\xi - \frac{d}{dt}[(-yH_x+xH_y+H_\vartheta-\dot{y}H_{\dot{x}}+\dot{x}H_{\dot{y}})_{\dot{\xi}}]\equiv 0.$$

tzt man für H die Form $(\text{I})_{11}$ ein, so erhält man die einfacheren Beungen:

$$\text{I)}_2 \quad -\frac{d}{dt}[A_1'(\vartheta)\dot{\vartheta}]+\alpha_1\ddot{y}-\alpha_2\ddot{x}-\frac{d}{dt}[\alpha_2\dot{x}+\alpha_3\dot{y}+A_2(\vartheta)\cdot\dot{\vartheta}]+\delta_2\equiv 0,$$

$$-\frac{d}{dt}[A_2'(\vartheta)\dot{\vartheta}]+\alpha_2\ddot{y}-\alpha_3\ddot{x}+\frac{d}{dt}[\alpha_1\dot{x}+\alpha_2\dot{y}+A_1(\vartheta)\cdot\dot{\vartheta}]+\delta_1\equiv 0,$$

$$-\frac{d}{dt}[A_1'(\vartheta)\dot{x}+A_2'(\vartheta)\dot{y}+C_{\vartheta\dot{\vartheta}}]+A_1(\vartheta)\ddot{y}-A_2(\vartheta)\ddot{x} + A_1''(\vartheta)\dot{x}\dot{\vartheta}+A_2''(\vartheta)\dot{y}\dot{\vartheta}+D''(\vartheta)\equiv 0.$$

dnet man diese Gleichungen nach $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\vartheta}$, so erhalten sie die folgende stalt:

$$\text{I)}_3 \quad \ddot{x}(-\alpha_2-\alpha_2)+\ddot{y}(\alpha_1-\alpha_3)+\ddot{\vartheta}(-A_1'(\vartheta)-A_2(\vartheta)) + \dot{\vartheta}^2(-A_1''(\vartheta)-A_2'(\vartheta))+\delta_2=0,$$

$$\ddot{x}(-\alpha_3+\alpha_1)+\ddot{y}(\alpha_2+\alpha_2)+\ddot{\vartheta}(-A_2'(\vartheta)+A_1(\vartheta)) + \dot{\vartheta}^2(-A_2''(\vartheta)+A_1'(\vartheta))+\delta_1=0,$$

$$\ddot{x}(-A_1'(\vartheta)-A_2(\vartheta))+\ddot{y}(-A_2'(\vartheta)+A_1(\vartheta))-C_{\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\vartheta}}\ddot{\vartheta} - C_{\vartheta\vartheta\dot{\vartheta}}\dot{\vartheta}+C_{\vartheta\vartheta}+D''(\vartheta)=0.$$

mit diese Gleichungen identisch erfüllt sind, müssen die Faktoren der ößen $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\vartheta}, \dot{\vartheta}^2$ für sich verschwinden:

$$\text{I)}_4 \quad \alpha_2=0;\quad \alpha_1=\alpha_3;\quad -A_1'(\vartheta)-A_2(\vartheta)=0,\quad -A_2'(\vartheta)+A_1(\vartheta)=0, \quad C_{\vartheta\dot{\vartheta}\dot{\vartheta}}=0;$$

o ergeben sich für $A_1(\vartheta), A_2(\vartheta)$ die trigonometrischen Funktionen

$$\text{I)}_5 \qquad A_1(\vartheta)=\beta_1\cos\vartheta+\beta_2\sin\vartheta,$$
$$A_2(\vartheta)=-\beta_2\cos\vartheta+\beta_1\sin\vartheta,$$

bei β_1, β_2 Konstante sind.

Nachdem die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, A_1(\vartheta)$ und $A_2(\vartheta)$ in der angegebenen Weise gewählt sind, nehmen die Gleichungen $(\mathrm{II})_3$ eine einfache Gestalt an:

$$(\mathrm{II})_3' \qquad \delta_1 = 0; \quad \delta_2 = 0; \quad -C_{\vartheta\vartheta\dot{\vartheta}}\dot{\vartheta} + C_{\vartheta\dot{\vartheta}} + D''(\vartheta) = 0.$$

Da $C_{\dot{\vartheta}\dot{\vartheta}\dot{\vartheta}}$ nach $(\mathrm{II})_4$ verschwindet, so ist der Ausdruck $C_{\dot{\vartheta}\dot{\vartheta}}$ nur von $\dot{\vartheta}$ abhängig; C_{ϑ} kann $\dot{\vartheta}$ höchstens in erstem Grade enthalten, so daß $C(\vartheta, \dot{\vartheta})$ als Summe $c_0(\vartheta) + c_1(\vartheta)\dot{\vartheta} + c_2(\dot{\vartheta})$ dargestellt werden kann. Das zweite Glied aber kann als unbestimmt integrierbar sofort aus der Wirkungsdichte fortgelassen werden. Mithin ist C nur die Summe einer Funktion von $\dot{\vartheta}$ allein und einer Funktion von ϑ allein.

Aus der dritten der Gleichungen $(\mathrm{II})_3'$ folgt weiter:

$$(\mathrm{II})_6 \qquad c_0''(\vartheta) + D''(\vartheta) = 0, \qquad c_0(\vartheta) + D(\vartheta) = \delta_3 \cdot \vartheta,$$

wobei δ_3 eine Konstante ist.

Wenn also $\delta \int H\,dt$ die beiden ersten Invarianzforderungen erfüllt, so hat H nach den erhaltenen Gleichungen folgende Form:

$$(\mathrm{II})_7 \quad H(x, y, \vartheta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\vartheta}) = \frac{\alpha}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (\beta_1 \cos\vartheta + \beta_2 \sin\vartheta)\dot{x}\dot{\vartheta} + (-\beta_2 \cos\vartheta + \beta_1 \sin\vartheta)\dot{y}\dot{\vartheta} + \delta_3\vartheta + C(\dot{\vartheta}).$$

Hierin bedeuten $\alpha, \beta_1, \beta_2, \delta_3$ Konstante.

III. Drehung der Scheibe um einen ihrer Punkte (x, y) mit konstanter Geschwindigkeit.

Die dritte Invarianzforderung besagt: Es gibt einen mit der Scheibe fest verbundenen Punkt (x, y), der die Eigenschaft hat, daß bei einer Drehung des Körpers um ihn die Variation der Wirkung sich nicht ändert. Um diese Bedingung (III) physikalisch deuten zu können, erinnern wir uns der Tatsache, daß bei Drehung des starren Körpers Fliehkräfte auftreten, deren Resultante im allgemeinen einen von Null verschiedenen Betrag hat. Nur die Zentrifugalkräfte, die bei Drehung um den Schwerpunkt auftreten, heben sich auf. Bedingung (III) definiert also den Schwerpunkt der Scheibe und entspricht der physikalischen Tatsache, daß bei Drehung um den Schwerpunkt die Resultante der gewöhnlichen Fliehkräfte verschwindet. Die dritte Transformation ändert nur den Winkel ϑ um eine der Zeit proportionale kleine Größe εt und erteilt also der Wirkungsfunktion H den Zuwachs $\varepsilon(tH_\vartheta + H_{\dot{\vartheta}})$. Damit die Forderung

$$(\mathrm{III}) \qquad \delta \int (H_\vartheta t + H_{\dot{\vartheta}})\,dt \equiv 0$$

erfüllt ist, müssen die Differentialgleichungen

$$(\mathrm{III})_1 \qquad (H_\vartheta t + H_{\dot{\vartheta}})_\xi - \frac{d}{dt}[(H_\vartheta t + H_{\dot{\vartheta}})_{\dot{\xi}}] \equiv 0 \qquad (\xi = x, y, \vartheta)$$

: jede Wahl der Größe t und für beliebige Funktionen x, y, ϑ erfüllt
. Auf Grund analoger Schlüsse wie bei der Galilei-Transformation (I)
gt:

$$(\text{II})_2 \qquad H_{\vartheta x} - \frac{d}{dt} H_{\vartheta \dot{x}} \equiv 0, \qquad H_{\vartheta y} - \frac{d}{dt} H_{\vartheta \dot{y}} \equiv 0, \qquad H_{\vartheta \vartheta} - \frac{d}{dt} H_{\vartheta \dot{\vartheta}} \equiv 0,$$

$$(\text{III})_3 \qquad H_{\dot{\vartheta} x} - H_{\vartheta \dot{x}} - \frac{d}{dt} H_{\dot{\vartheta} \dot{x}} \equiv 0, \qquad H_{\dot{\vartheta} y} - H_{\vartheta \dot{y}} - \frac{d}{dt} H_{\dot{\vartheta} \dot{y}} \equiv 0, \qquad \frac{d}{dt} H_{\dot{\vartheta} \dot{\vartheta}} \equiv 0.$$

dem man den Ausdruck $(\text{II})_7$ für H einsetzt, erhält man die Gleichungen

$$(\text{II})_4 \qquad -\frac{d}{dt}[(-\beta_1 \sin\vartheta + \beta_2 \cos\vartheta)\dot{\vartheta}] \equiv 0,$$

$$-\frac{d}{dt}[(+\beta_2 \sin\vartheta + \beta_1 \cos\vartheta)\dot{\vartheta}] \equiv 0,$$

$$-(\beta_1 \cos\vartheta + \beta_2 \sin\vartheta)\dot{x}\dot{\vartheta} + (\beta_2 \cos\vartheta - \beta_1 \sin\vartheta)\dot{y}\dot{\vartheta}$$
$$-\frac{d}{dt}[(-\beta_1 \sin\vartheta + \beta_2 \cos\vartheta)\dot{x} + (\beta_2 \sin\vartheta + \beta_1 \cos\vartheta)\dot{\vartheta}] \equiv 0,$$

$$(\text{II})_5 \qquad -(-\beta_1 \sin\vartheta + \beta_2 \cos\vartheta)\dot{\vartheta} - \frac{d}{dt}(\beta_1 \cos\vartheta + \beta_2 \sin\vartheta) \equiv 0,$$

$$-(\beta_2 \sin\vartheta + \beta_1 \cos\vartheta)\dot{\vartheta} - \frac{d}{dt}(-\beta_2 \cos\vartheta + \beta_1 \sin\vartheta) \equiv 0,$$

$$\frac{d}{dt} C_{\dot{\vartheta}\dot{\vartheta}} \equiv 0.$$

ihrt man in den beiden ersten Gleichungen $(\text{III})_4$ die Differentiation
ch t aus, so erhält man:

$$(\text{II})_4' \qquad (-\beta_1 \sin\vartheta + \beta_2 \cos\vartheta)\ddot{\vartheta} + (-\beta_1 \cos\vartheta - \beta_2 \sin\vartheta)\dot{\vartheta}^2 \equiv 0,$$
$$(-\beta_2 \sin\vartheta - \beta_1 \cos\vartheta)\ddot{\vartheta} - (+\beta_2 \cos\vartheta - \beta_1 \sin\vartheta)\dot{\vartheta}^2 \equiv 0.$$

die Funktionen $\vartheta, \dot{\vartheta}^2, \ddot{\vartheta}$ voneinander unabhängig sind, so folgt weiterhin:

$$(\text{II})_6 \qquad -\beta_1 \sin\vartheta + \beta_2 \cos\vartheta \equiv 0,$$
$$+\beta_2 \sin\vartheta + \beta_1 \cos\vartheta \equiv 0,$$

o

$$\beta_1 = \beta_2 = 0.$$

t diesen Werten β_1, β_2 sind sämtliche Gleichungen $(\text{III})_4$ und die beiden
ten $(\text{III})_5$ erfüllt; aus der letzten folgt: $C_{\dot{\vartheta}\dot{\vartheta}\dot{\vartheta}} \equiv 0$; d. h. $C(\dot{\vartheta})$ ist eine
nktion 2. Grades von $\dot{\vartheta}$ und kann in der Form

$$(\text{II})_7 \qquad C(\dot{\vartheta}) = \frac{\gamma}{2}\dot{\vartheta}^2$$

gesetzt werden, da das in $\dot{\vartheta}$ lineare Glied als unbestimmt integrierbar
ggelassen werden kann.

Somit ergibt sich aus den drei Invarianzforderungen

$$(\mathrm{III})_8 \qquad H(x, y, \vartheta; \dot{x}, \dot{y}, \dot{\vartheta}) = \frac{\alpha}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\gamma}{2}\dot{\vartheta}^2 + \delta \cdot \vartheta.$$

Die Koeffizienten α, γ, δ sind konstant.

Diese Form der Wirkungsfunktion unterscheidet sich von der aus der Mechanik bekannten nur durch die dem Potential entsprechende Größe $\delta \cdot \vartheta$. Setzt man $\delta = 0$, so stellt

$$H(x, y, \vartheta; \dot{x}, \dot{y}, \dot{\vartheta}) = \frac{\alpha}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\gamma}{2}\dot{\vartheta}^2$$

die Energie im strengen Sinne dar. Denn da durch die Forderung (III) der Punkt (x, y) als Schwerpunkt definiert wird, so ist die Wirkungsfunktion H gleich der Summe aus der kinetischen Energie der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunktes und der lebendigen Kraft der Drehung um den Schwerpunkt.

Es ist also möglich, die Form der Wirkungsfunktion für den starren Körper in der Ebene herzuleiten aus folgenden Forderungen: Es soll ein Wirkungsprinzip gelten; die Variation des Wirkungsintegrals soll invariant sein gegenüber den Galilei-Transformationen der Ebene, gegenüber den Drehungen des Koordinatensystems und den Drehungen des Körpers mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um einen seiner Punkte. Aus dem Wirkungsprinzip $\delta \int H\, dt = 0$ aber folgen die Bewegungsgleichungen des starren Körpers. Wir können mithin die gesamte Mechanik des starren Systems in der Ebene aus Invarianzforderungen ableiten ohne Heranziehung der Newtonschen Gesetze.

(Eingegangen am 13. Juni 1920.)

Ein Satz über ebene Potentialströmungen.

Von

Philipp Frank in Prag.

Die neuen von Koebe, Bieberbach, Pick, Faber, Löwner u. a. ıfgestellten Sätze über konforme Abbildung schlichter Bereiche wurden tzt schon wiederholt zur Lösung hydrodynamischer Probleme heran-ːzogen[1]). Es lassen sich aber zweifellos daraus noch allgemeinere Sätze ɔer Flüssigkeitsströmungen ableiten, von denen einer hier behandelt erden soll.

Unter Strömungen sind im folgenden wie in den früheren Arbeiten ımer verstanden: stationäre ebene Potentialströmungen einer inkom-ːessiblen Flüssigkeit, die im Unendlichen in eine Parallelströmung in der ichtung der positiven x-Achse von der Geschwindigkeit 1 übergehen und ı Profil umströmen, das von einer einfach geschlossenen, im übrigen aber illkürlichen Kurve (Jordankurve) begrenzt ist. Wir können uns diesen ɔrgang etwa so vorstellen, daß die Flüssigkeit etwa von links her aus ɜm Unendlichen auf das Profil zuströmt, sich hier in zwei Arme teilt, ɛ sich rechts vom Profil wieder vereinigen. Die Stromlinien zerfallen ıdurch in zwei Gruppen, je nachdem sie dem einen oder anderen Arm ɾ Strömung angehören. Die beiden Gruppen werden durch eine Strom-ıie getrennt, die von links kommend gerade am Rande des Profils (im ıaupunkt) mit der Geschwindigkeit 0 endet und ebenso auf der anderen ite des Profils mit der Geschwindigkeit 0 beginnend sich ins Unendliche ɜtreckt, wo sich ihre Geschwindigkeit dem Wert 1 nähert. Wir wollen ɛse Stromlinie die „Teilungslinie" der Strömung nennen. Der Satz, den ɾ beweisen wollen, ist nun der folgende:

Längs der Teilungslinie der Strömung nimmt der absolute Betrag ɾ Geschwindigkeit vom Wert 1 *im Unendlichen bis zum Wert* 0 *im*

[1]) R. v. Mises, Zeitschrift für Flugtechn. u. Motorluftschiffahrt, 8 (1917), S. 157 163 und 11 (1920), S. 68—73, 87—89; Ph. Frank u. K. Löwner, Mathem. ɜtschr., 3 (1919), S. 78—86.

Staupunkt monoton ab und auf der anderen Seite des Profils wieder vom Wert 0 bis 1 monoton zu.

Zum Beweis bedienen wir uns einer etwas anderen hydrodynamischen Deutung der Abbildung wie in den früheren Arbeiten. Wir gehen wie dort von einer Strömung um ein bestimmtes Profil in der z-Ebene aus. Diese sei durch die komplexe Strömungsfunktion[2]) $W(z)$ gegeben. Wir nehmen nun eine konforme Abkürzung vor:

$$\zeta = \zeta(z) \quad \text{bzw.} \quad z = z(\zeta), \tag{1}$$

die das Äußere des gegebenen Profils schlicht auf das Äußere eines anderen von einer Jordankurve begrenzten Profils so abbildet, daß die Abbildung im Unendlichen die Identität ist. Dann ist dadurch in der Bildebene, der ζ-Ebene, eine Strömung gegeben, deren Strömungsfunktion

$$W^*(\zeta) = W(z(\zeta)) \tag{2}$$

ist. Sie erfolgt um das Profil, das durch die Abbildung (1) aus dem ursprünglichen hervorgegangen ist.

Nur wählen wir nicht wie in den früheren Arbeiten als Funktion W die Strömungsfunktion für ein kreisförmiges Profil, sondern für ein Profil, das aus einer geradlinigen Strecke in der x-Achse besteht. Die Strömung ist dann einfach eine Parallelströmung, die durch die Strömungsfunktion

$$W(z) = z \tag{3}$$

gegeben ist. Das Gebiet dieser Strömung fassen wir als von einem Schlitz in der x-Achse, der durch das Profil gegeben ist, begrenzt auf. Durch die Abbildung (1) erhalten wir aus (3)

$$W^*(\zeta) = z(\zeta). \tag{4}$$

Dies ist die Strömungsfunktion um dasjenige Profil, das durch die Abbildung (1) aus dem Schlitz entsteht. Der absolute Betrag der Strömungsgeschwindigkeit

$$\left|\frac{dW^*}{d\zeta}\right| = \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| \tag{5}$$

ist in unserem Falle direkt der Modul der Abbildung (1). Alle Sätze über diesen Abbildungsmodul lassen sich also direkt als Sätze über Strömungsgeschwindigkeiten deuten. Da bei dieser Abbildung Teilungslinien wieder in Teilungslinien übergehen, ist bei unserer Strömung in der ζ-Ebene die Teilungslinie das Bild der geradlinigen Verlängerungen unseres Profils in der z-Ebene.

Nun hat Löwner[3]) den Satz bewiesen, daß bei Abbildungen des

[2]) Vgl. Frank u. Löwner, l. c. [1]).

[3]) K. Löwner, Math. Zeitschr., 3 (1919), S. 68, Satz II.

ußeren eines Schlitzbereiches, die das unendliche in sich überführen, der bbildungsmodul auf den beiden geradlinigen Verlängerungen des Schlitzes ne monotone Funktion der Entfernung von seinem Mittelpunkt ist.

Da nun in unserem Falle der Abbildungsmodul einfach der absolute etrag der Geschwindigkeit unserer Strömung in der ζ-Ebene ist und das ußere jeder Jordankurve auf das Äußere eines Schlitzes in der voraus-esetzten Art abgebildet werden kann, ist der von uns aufgestellte Satz ewiesen.

Wenn der Abbildungsmodul auch nur längs einer Teilstrecke der Ver-ngerung konstant ist, kann nach Löwner die Abbildung nur die Identität in. D. h. *wenn auch nur längs eines noch so kleinen Stückes der eilungslinie die Geschwindigkeit konstant ist, ist schon die gesamte trömung eine Parallelströmung.*

(Eingegangen am 19. Juli 1920.)

Über algebraische Gleichungen mit reellen Wurzeln und den sogen. casus irreducibilis bei kubischen Gleichungen.

Von

Alfred Loewy in Freiburg i. Br.

Im folgenden will ich, und zwar mit den einfachsten Hilfsmitteln, also im besondern, ohne die Galoissche Theorie zu benützen, einen Satz über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln beweisen. Das, soweit mir bekannt, in der Literatur bisher noch nicht hervorgehobene Theorem handelt von den algebraischen Hilfsgleichungen, die unvermeidlich sind, wenn für eine algebraische Gleichung mit lauter reellen Wurzeln eine derselben durch ausnahmslos reelle Größen dargestellt wird. Der fragliche Satz lautet:

Satz I. $J(x) = 0$ sei eine algebraische Gleichung mit lauter reellen Wurzeln; die Koeffizienten von $J(x)$ sollen einem reellen Rationalitätsbereiche P angehören, in dem $J(x)$ eine irreduzible Funktion ist. Eine Wurzel ζ_1 der Gleichung $J(x) = 0$ sei rational mit Koeffizienten aus P dargestellt durch lauter reelle Größen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$, wo ϱ_1 einer Gleichung $X_1(x) = 0$ genügt, deren Koeffizienten P angehören und die in P irreduzibel ist, ϱ_2 einer Gleichung $X_2(x) = 0$, deren Koeffizienten dem durch Adjunktion von ϱ_1 erweiterten Rationalitätsbereiche (P, ϱ_1) angehören und die in diesem irreduzibel ist usw., endlich ϱ_k einer Gleichung $X_k(x) = 0$, deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereiche $(P, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{k-1})$ angehören und die in diesem Bereiche irreduzibel ist. Die Grade aller Hilfsgleichungen $X_i(x) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sollen Primzahlen sein. Hat $J(x) = 0$ den Grad $n = \overline{p}_1 \cdot \overline{p}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{p}_f$, wobei $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots, \overline{p}_f$ lauter (event. auch gleiche) Primzahlen bedeuten, so muß, wie bewiesen werden soll, das Gleichungssystem $X_i(x) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ mindestens f Gleichungen der Grade $\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots, \overline{p}_f$ enthalten, und jede dieser f unvermeidlichen Gleichungen besitzt ausnahmslos reelle Wurzeln.

Aus dem Satz I folgt unmittelbar der von Herrn Hölder[1]) stam-
ende und von ihm mittels der Galoisschen Theorie bewiesene[2])
Satz II: Unter den in einem reellen Rationalitätsbereiche irreduzib-
Gleichungen mit reellen Wurzeln sind die einzigen, bei denen eine
urzel durch reelle Radikale dargestellt werden kann, die durch Quadrat-
rzeln auflösbaren. Die Gradzahl solcher Gleichungen muß eine Potenz
n 2 sein.

Da der Grad einer kubischen Gleichung keine Potenz von 2 ist, er-
ot sich aus dem Satze II des Herrn Hölder das von ihm zuerst und
ar auch ohne Galoissche Theorie, nämlich ohne Verwendung seines
tzes II bewiesene Resultat[3]), daß bei einer irreduziblen kubischen Glei-
ung mit drei reellen Wurzeln keine durch reelle Radikale darstellbar
. Mit Rücksicht auf diesen sogen. casus irreducibilis der kubischen
eichung halte ich die vorliegenden Untersuchungen so elementar, daß
, wie ich denke, in einer einführenden Vorlesung über Algebra vorge-
gen werden können.

Ich leite alles einheitlich aus den folgenden zwei Sätzen ab, deren
h übrigens auch Herr Hölder[4]) bei seinem elementaren Beweis für
n casus irreducibilis der kubischen Gleichung bedient:

A. Sind $J_1(x) = 0$ und $J_2(x) = 0$ zwei im Rationalitätsbereiche P
eduzible Gleichungen der Grade n_1 und n_2 mit den Wurzeln η_1 und η_2
d sind die Grade der Gleichungen, denen η_1 nach Adjunktion von η_2
d η_2 nach Adjunktion von η_1 genügen, n_1' bzw. n_2', so ist $\frac{n_1}{n_1'} = \frac{n_2}{n_2'}$.
eser von Kronecker[5]) in seinen Vorlesungen vorgetragene und von
errn Kneser[6]) selbständig gefundene und zuerst veröffentlichte Satz
nn als elementar gelten. Herr Kneser[7]) hat ihn mittels solcher Hilfs-

[1]) O. Hölder, Über den casus irreducibilis bei der Gleichung dritten Grades, th. Annalen **38** (1891), S. 312.

[2]) A. Kneser, Bemerkungen über den sogen. casus irreducibilis bei kubischen ichungen, Math. Annalen **41** (1893), S. 344—348, beweist den Hölderschen Satz ne Galoissche Theorie unter der Voraussetzung, daß die fragliche Gleichung eine rmalgleichung ist, d. h. daß sich alle ihrer Wurzeln rational durch eine aus-icken lassen.

[3]) Vgl. O. Hölder, a. a. O. S. 309—310.

[4]) Vgl. Anmerkung [3]). Die Formulierung des im Texte folgenden Satzes B. für e Normalgleichung und die Verwandlung der kubischen Gleichung durch Adjunk-n der Quadratwurzel der Diskriminante in eine Normalgleichung, wie sie Herr lder hat, ergibt keine Vereinfachung.

[5]) Vgl. Hölder, a. a. O. S. 309.

[6]) A. Kneser, Über Gattungen algebraischer Größen, Math. Annalen **30** (1887), 195.

[7]) Vgl. die Darstellung bei A. Kneser, Über die algebraische Unauflösbarkeit herer Gleichungen, Journ. f. r. u. ang. Math. **106** (1890), S. 52.

mittel bewiesen, wie sie Gauß schon 1801 bei Abfassung seiner Disquisitiones arithmeticae besaß. Einen einfachen Beweis im Anschluß an Frobenius[8]), der sich auch in einer Elementarvorlesung vortragen läßt, findet man in meinem Aufsatz: „Eine algebraische Behauptung von Gauß“[9]).

B. Wird eine im Rationalitätsbereiche P irreduzible Gleichung $J(x)=0$ durch Adjunktion aller Wurzeln einer Gleichung $f(x)=0$ mit Koeffizienten aus P reduzibel, so zerfällt $J(x)$ in lauter verschiedene, im erweiterten Rationalitätsbereiche irreduzible Faktoren gleichen Grades.

Der Vollständigkeit wegen beweise ich den Satz B. im Anschluß an Herrn Hölder[10]). Statt dem Rationalitätsbereiche P alle Wurzeln von $f(x)=0$ zu adjungieren, genügt die Adjunktion einer Größe λ_1 von folgender Eigenschaft: λ_1 ist eine ganze rationale Funktion aller Wurzeln von $f(x)=0$ mit Koeffizienten aus P, und jede Wurzel von $f(x)=0$ ist rational mit Koeffizienten aus P durch λ_1 darstellbar. Die Größe λ_1 genügt einer Normalgleichung $N(x)=0$ in P, d. h. einer in P irreduziblen Gleichung, deren sämtliche Wurzeln rational mit Koeffizienten aus P durch λ_1 darstellbar sind. Dies ist der Vorbereitungssatz für die Galoissche Theorie, der schon Abel (Journ. f. r. u. ang. Math. 4 (1829), S. 261 = Œuvres par Sylow et Lie, I, p. 547) bekannt war. Sei $F_1(x;\lambda_1)$ einer der nach Adjunktion von λ_1 zum Rationalitätsbereiche P irreduziblen Faktoren von $J(x)$; dann hat man eine Zerlegung $J(x)=F_1(x;\lambda_1)\cdot G(x;\lambda_1)$. Mittels der Gleichung $N(\lambda_1)=0$ lassen sich $F_1(x;\lambda_1)$ und $G(x;\lambda_1)$ als ganze rationale Funktionen von λ_1 annehmen.

Die Relation $J(x)=F_1(x;\lambda_1)\cdot G(x;\lambda_1)$ kann dann dahin gedeutet werden, daß die Gleichung $J(x)=F_1(x;y)\cdot G(x;y)$ mit der in P irreduziblen Gleichung $N(y)=0$ die Wurzel λ_1 gemeinsam hat. Folglich besteht nach der Grundeigenschaft irreduzibler Gleichungen für alle x des Rationalitätsbereiches P die Relation $J(x)=F_1(x;\lambda_i)\cdot G(x;\lambda_i)$ $(i=1,2,\ldots,\nu)$, bei der λ_i jede der ν Wurzeln der irreduziblen Gleichung $N(x)=0$ bedeutet. Da die Gleichung $J(x)=F_1(x;\lambda_i)\cdot G(x;\lambda_i)$ für unendlich viele x gilt und ihre linke Seite eine ganze rationale Funktion von x ist, hat man in $J(x)=F_1(x;\lambda_i)\cdot G(x;\lambda_i)$ eine für jedes x identisch bestehende Gleichung vor sich. Die letzte Relation $J(x)=F_1(x;\lambda_i)\cdot G(x;\lambda_i)$ besagt, daß $J(x)$ durch alle Größen $F_1(x;\lambda_i)$ $(i=1,2,\ldots,\nu)$ teilbar ist; diese gehören sämtlich, da jedes λ_i

[8]) G. Frobenius, Math. Annalen 70 (1911), S. 457.

[9]) A. Loewy, Jahresbericht der deutschen Math. Vereinigung 26 (1917), S. 101 bis 103.

[10]) Vgl. Hölder, a. a. O. S. 310.

$= 1, 2, \ldots, \nu)$ eine rationale Funktion von λ_1 ist, dem Rationalitäts-reich $(P; \lambda_1)$ an. Sie sind in ihm irreduzibel. Wäre nämlich $F_1(x; \lambda_i)$ Bereiche $(P; \lambda_1)$ zerlegbar in $F_1(x; \lambda_i) = H(x; \lambda_1) \cdot K(x; \lambda_1)$, so würde eraus, da bei einer Normalgleichung alle Wurzeln rationale Funktionen ner jeden sind, also λ_1 auch gleich einer rationalen Funktion $\varphi_i(\lambda_i)$ n λ_i sein muß, $F_1(x; \lambda_i) = H(x; \varphi_i(\lambda_i)) \cdot K(x; \varphi_i(\lambda_i))$ folgen. Hieraus irde sich aber $F_1(x; \lambda_1) = H(x; \varphi_i(\lambda_1)) \cdot K(x; \varphi_i(\lambda_1))$ ergeben; dies irde aber die Zerlegbarkeit der in $(P; \lambda_1)$ irreduziblen Funktion $F_1(x; \lambda_1)$ deuten. Infolge ihrer Irreduzibilität im Rationalitätsbereiche $(P; \lambda_1)$ sind zwei der Funktionen $F_1(x; \lambda_i)$ und $F_1(x; \lambda_k)$, wobei λ_i und λ_k irgend ei der ν Größen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ bedeuten, entweder teilerfremd oder bis f einen konstanten Faktor übereinstimmend. Es seien $F_1(x; \lambda_1)$, $(x; \lambda_2), \ldots, F_1(x; \lambda_\mu)$ die verschiedenen der ν Funktionen $F_1(x; \lambda_1)$, $(x; \lambda_2), \ldots, F_1(x; \lambda_\nu)$. Dann erhält man

$$J(x) = F_1(x; \lambda_1) \cdot F_1(x; \lambda_2) \ldots F_1(x; \lambda_\mu) \cdot \psi(x; \lambda_1),$$

bei $\psi(x; \lambda_1)$ ebenso wie die $F_1(x; \lambda_i)$ eine Funktion mit Koeffizienten s $(P; \lambda_1)$ ist. Bildet man nun mit allen Wurzeln von $N(x) = 0$ das odukt $F_1(x; \lambda_1) \cdot F_1(x; \lambda_2) \ldots F_1(x; \lambda_\nu)$, so ist dieses als sym-etrische Funktion der Gleichungswurzeln von $N(x) = 0$ eine Funk-n $L(x)$ mit Koeffizienten aus P. Da $L(x)$ und $J(x)$ beide durch $(x; \lambda_1)$ teilbar sind, haben sie mindestens eine Wurzel gemeinsam, und olge der Irreduzibilität von $J(x)$ muß $L(x)$ durch $J(x)$ teilbar sein. s dem Bau der Funktion $L(x)$ und $J(x)$ folgt, daß $\psi(x)$ ein Teiler n $F_1(x; \lambda_{\mu+1}) \cdot F_1(x; \lambda_{\mu+2}) \ldots F_1(x; \lambda_\nu)$ zu sein hat. Mithin würde $x)$, wenn es eine Funktion von x wäre, mindestens einen Linearfaktor thalten, der auch in $F_1(x; \lambda_1) \cdot F_1(x; \lambda_2) \ldots F_1(x; \lambda_\mu)$, dem Produkt r verschiedenen der Funktionen $F_1(x; \lambda_i)$ auftritt. Dann hätte aber $x)$ im Gegensatz zu seiner Irreduzibilität eine mehrfache Wurzel. Folg-h muß $\psi(x)$ eine Konstante sein, und die Zerlegung

$$J(x) = F_1(x; \lambda_1) \cdot F_1(x; \lambda_2) \ldots F_1(x; \lambda_\mu) \cdot C$$

weist den Satz B als richtig; denn die μ rechtsstehenden Funktionen d von gleichem Grade in x und in dem durch die Adjunktion aller urzeln von $f(x) = 0$ erweiterten Rationalitätsbereiche irreduzibel, da ser der Bereich $(P; \lambda_1)$ ist.

Wir wenden uns wieder zu Satz A. Nach ihm hat man $\frac{n_1}{n_1'} = \frac{n_2}{n_2'}$; h. wenn $n_1' < n_1$, so ist auch $n_2' < n_2$; die Gleichungen $J_1(x) = 0$ und $(x) = 0$ reduzieren sich also gegenseitig. Wird im besonderen $J_1(x)$ rch Adjunktion einer Wurzel einer Gleichung $J_2(x) = 0$ vom Primzahl-

grad $n_2 = p$ reduzibel, so wird auch $J_2(x)$ bei Adjunktion einer, also a fortiori aller Wurzeln von $J_1(x)$ reduzibel und zerfällt nach Satz B wegen seines Primzahlgrades in Faktoren ersten Grades, d. h. die Wurzeln von $J_2(x) = 0$ sind rationale Funktionen derjenigen von $J_1(x) = 0$ mit Koeffizienten aus P. Mithin ergibt sich:

C. Hat man zwei im Rationalitätsbereiche P irreduzible Gleichungen $J_1(x) = 0$ und $J_2(x) = 0$ und wird $J_1(x)$ durch Adjunktion einer Wurzel von $J_2(x)$ reduzibel, so sind die Wurzeln von $J_2(x) = 0$, wenn $J_2(x)$ vom Primzahlgrade p ist, rationale Funktionen derjenigen von $J_1(x) = 0$.

Nach diesen Vorbereitungen beweise ich den am Anfang angegebenen Satz I und benütze dabei die bei seiner Formulierung verwandten Bezeichnungen. $J(x) = 0$ sei die im reellen Rationalitätsbereiche P irreduzible Gleichung n-ten Grades mit lauter reellen Wurzeln; eine von ihnen ζ_1 lasse sich durch die reellen Größen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$ ausdrücken. Adjungiert man dem Bereiche P der Reihe nach $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$, so sei ϱ_α die erste dieser Größen, deren Adjunktion $J(x) = 0$ reduzibel macht. In dem Rationalitätsbereiche $(P, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_\alpha)$ genügt dann ζ_1 einer irreduziblen Gleichung, deren Grad n' kleiner als n ist. Es sei p_α der Grad der in $(P, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\alpha-1})$ irreduziblen Gleichung $X_\alpha(x) = 0$, der ϱ_α genügt; nach Voraussetzung soll der Grad p_α von $X_\alpha(x) = 0$, wie der jeder Hilfsgleichung $X_i(x) = 0$, eine Primzahl sein. Nach dem Kronecker-Kneserschen Satz A hat man $\frac{n}{n'} = \frac{p_\alpha}{h'_\alpha}$, wenn h'_α der Grad derjenigen irreduziblen Gleichung ist, der ϱ_α nach Adjunktion von ζ_1 zum Rationalitätsbereiche $(P, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\alpha-1})$ genügt. Wegen des Primzahlgrades p_α sind nach C die Wurzeln der Hilfsgleichung $X_\alpha(x) = 0$ rationale Funktionen der Wurzeln von $J(x) = 0$ mit Koeffizienten aus $(P, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\alpha-1})$. Da alle Wurzeln von $J(x) = 0$ ebenso wie der Rationalitätsbereich $(P, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\alpha-1})$ reell sind, hat $X_\alpha(x) = 0$ lauter reelle Wurzeln.

Adjungiert man weiter die auf ϱ_α folgenden Größen, so bleibe die Gleichung n'-ten Grades für ζ_1 irreduzibel bis zur Adjunktion von ϱ_β. In dem Bereiche $(P, \varrho_1, \ldots, \varrho_\alpha, \ldots, \varrho_\beta)$ genüge ζ_1 einer irreduziblen Gleichung vom Grade $n'' < n'$. Hat dann die im Bereiche $(P, \varrho_1, \ldots, \varrho_\alpha, \ldots, \varrho_{\beta-1})$ irreduzible Gleichung $X_\beta(x) = 0$, der die reelle Größe ϱ_β genügt, den Primzahlgrad p_β, so ist $\frac{n'}{n''} = \frac{p_\beta}{h'_\beta}$, wobei h'_β den Grad der im erweiterten Rationalitätsbereiche $(P, \varrho_1, \ldots, \varrho_\alpha, \ldots, \varrho_{\beta-1}, \zeta_1)$ irreduziblen Gleichung bedeutet, die ϱ_β befriedigt. Da $X_\beta(x) = 0$ vom Primzahlgrad sein soll, ergibt sich aus der Reellität der Wurzeln von $J(x) = 0$, also auch derjenigen des Teilers von $J(x)$ vom Grade n', dem ζ_1 im Rationalitätsbereiche $(P, \varrho_1, \ldots, \varrho_\alpha, \ldots, \varrho_{\beta-1})$ genügt, und der Reellität des zuletzt

annten Rationalitätsbereiches, daß $X_\beta(x) = 0$ nach Satz C nur reelle rzeln besitzt. Derart fortfahrend, erhält man die weiteren Beziehungen $= \frac{p_\gamma}{h_\gamma'}$, $\frac{n'''}{n^{(4)}} = \frac{p_\delta}{h_\delta'}$, ..., und die Hilfsgleichungen $X_\gamma(x) = 0$, $X_\delta(x) = 0$, ... en lauter reelle Wurzeln.

Da ζ_1 schließlich rational in $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$ wird, also am Ende einer chung ersten Grades genügt, ergibt sich die Schlußrelation $\frac{n^{(t-1)}}{1} = \frac{p_\tau}{h_\tau'}$; bei ist p_τ der Primzahlgrad jener irreduziblen Gleichung $X_\tau(x) = 0$, en Wurzel ϱ_τ bewirkt, daß ζ_1 rational bekannt wird, und h_τ' bedeutet Grad der irreduziblen Gleichung, der ϱ_τ in dem durch Adjunktion ζ_1 erweiterten Rationalitätsbereiche $(P, \varrho_1, \ldots, \varrho_\alpha, \ldots, \varrho_{\tau-1}, \zeta_1)$ ge-t. $X_\tau(x) = 0$ hat infolge seines Primzahlgrades, der reellen Wurzeln $J(x) = 0$, also auch derjenigen des in $(P, \varrho_1, \ldots, \varrho_\alpha, \ldots, \varrho_{\tau-1})$ irre-iblen Teilers $n^{(t-1)}$-ten Grades, dem ζ_1 genügt, und der Reellität des tzt genannten Rationalitätsbereiches nach Satz C lauter reelle Wurzeln.

Die Multiplikation der gefundenen Gleichungen gibt

$$\frac{n}{n'} \cdot \frac{n'}{n''} \cdots \frac{n^{(t-1)}}{1} = \frac{p_\alpha \cdot p_\beta \cdots p_\tau}{h_\alpha' h_\beta' \ldots h_\tau'},$$

$$\frac{p_\alpha \cdot p_\beta \cdots p_\tau}{n} = h_\alpha' \cdot h_\beta' \ldots h_\tau'$$

Da das Produkt $p_\alpha \cdot p_\beta \ldots p_\tau$ durch n teilbar ist, müssen unter den len $p_\alpha, p_\beta, \ldots, p_\tau$ alle Primfaktoren $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_f$ von $n = \bar{p}_1 \bar{p}_2 \ldots \bar{p}_f$ reten, und jede dieser Primzahlen entspricht einer Hilfsgleichung mit er reellen Wurzeln. Diese f Gleichungen der Grade $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_f$ lauter reellen Wurzeln sind unvermeidlich. Hiermit ist Satz I be-en.

Ich wende mich nun zum Satze II. Läßt sich eine Wurzel einer chung durch Radikale darstellen, so kann man ausschließlich solche venden, deren Exponenten Primzahlen sind. Diese Radikale werden eführt durch reine Gleichungen $x^p = a$ vom Primzahlgrade. Diese chungen sind irreduzibel; denn wären sie reduzibel, so hätten sie eine onale Wurzel, a wäre die p-te Potenz einer Zahl aus dem Rationali-bereiche[11]) und die Adjunktion der einzigen reellen Wurzel der Glei-ng würde den Rationalitätsbereich nicht erweitern. Läßt sich nun der d n der irreduziblen Gleichung $J(x) = 0$ mit lauter reellen Wurzeln h eine Primzahl $\bar{p}$ teilen, so muß bei den zu verwendenden Hilfs-

[11]) Abel, Journ. f. r. u. ang. Math. 1 (1826), S. 71 Œuvres par Sylow et Sie, 72. Kronecker, Monatsberichte der Berliner Akademie 1879, S. 206.

gleichungen, da nur reelle Größen benützt werden sollen, nach Satz I auch stets eine vom Grade $\bar{p}$ mit lauter reellen Wurzeln auftreten. In unserem Falle der Darstellung durch Radikale, wo nur reine Gleichungen als Hilfsgleichung benützt werden dürfen, hat demnach eine Hilfsgleichung $x^{\bar{p}} = a$ zur Verwendung zu kommen. Da diese für $\bar{p} > 2$ nicht lauter reelle Wurzeln hat, kann $\bar{p}$ nur den Wert 2 besitzen, und es muß der Grad n von $J(x)$, wie bewiesen werden soll, eine Potenz von 2 sein. Der casus irreducibilis der kubischen Gleichung ist durch Satz II erledigt.

Freiburg i. Br., 6. August 1920.

(Eingegangen am 14. August 1920.)

Über die Koeffizientensumme einer beschränkten Potenzreihe.

Von

Ludwig Neder in Göttingen.

Es bezeichne x eine komplexe Veränderliche, $f(x)$ eine Funktion selben, die im Kreise $|x|<1$ regulär, also $=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, und absolut ist, und es sei $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Dann verkt man Herrn Landau die folgenden Sätze[1]):

I. *Für die Menge aller Funktionen $f(x)$ hat bei festem n die obere nze von $|s_n|$ den Wert*

$$G_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{\nu}^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\right)^2.$$

II. *Diese Grenze wird für $n>0$ bei einer speziellen Funktion $f(x)$ icht, ist also Maximum.*

Anschließend bewies Herr Bohr[2]):

III. *Für jede einzelne Funktion $f(x)$ ist*

$$\lim_{n=\infty} \{G_n - |s_n|\} = \infty.$$

IV. *Es gibt eine spezielle Funktion $f(x)$, so daß*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{|s_n|}{G_n} = 1.$$

[1]) Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe (Zweite Abh.); Arch. n. Phys. (3) **21** (1913), S. 250. Vgl. auch: Darstellung und Begründung einiger rer Ergebnisse der Funktionentheorie (zitiert als Landau), Berlin 1916; § 2.

[2]) Über die Koeffizientensumme einer beschränkten Potenzreihe (Zweite Mitt.); . Nachr. 1917, S. 119; Satz B bzw. A. Ein in der ersten Mitteilung gleichen ls (Gött. Nachr. 1916, S. 276) erhaltenes Zwischenresultat übergehe ich. (Die en Arbeiten werden als Bohr II bzw. I zitiert.)

Wie man sieht, besteht zwischen III und IV noch eine Lücke, die m folgenden ausgefüllt werden soll durch den Satz:

V. *Zu jeder Folge $L_n \to \infty$ gibt es eine spezielle Funktion $f(x)$ der Art, daß für unendlich viele n*

$$|s_n| \geqq G_n - L_n.$$

Bei der Aufstellung der hiermit angekündigten Funktion $f(x)$ wird von der Konstruktion, die Herr Bohr bei seinem Beweise von IV angegeben hat, der Grundgedanke in dem nachstehend in Fußnote 9 auseinandergesetzten Umfang beibehalten werden. Jedoch gestaltet sich die Durchführung ganz erheblich schwieriger[3]).

Bezeichnungen[4]).

Es soll für $n = 0, 1, 2, \ldots$ sein[5])

$$P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} x^\nu = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^n$$

für $|x| \leqq 1$,

also[5])

$$s_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|x|=r} \frac{f(x)}{x^{n+1}} P_n^2(x)\,dx \qquad (0 < r < 1),$$

---

[3]) Zu den Sätzen III und V gelten in der Theorie der Fourierreihen die Analoga für mod 2π periodische, meßbare Funktionen $\varphi(t)$, die für alle reellen t absolut $\leqq 1$ sind. Der Landauschen oberen Grenze G_n entspricht dabei, wie bereits Herr Szász (Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe; Math. Zeitschr., 1 (1918), S. 163; vgl. Anm. 13 daselbst) bemerkt hat, die Lebesguesche Konstante

$$\varrho_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})\alpha|}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\,d\alpha,$$

für s_n gilt der Ausdruck

$$s_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\alpha)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\,d\alpha,$$

und die Sätze lauten bzw.:

A. Für jedes einzelne $\varphi(t)$ ist

$$\varrho_n - |s_n| \to \infty.$$

B. Zu jeder Folge λ_n mit dem Grenzwert ∞ gibt es eine spezielle Funktion $\varphi(t)$ der Art, daß $|s_n| \geqq \varrho_n - \lambda_n$ für unendlich viele n.

Der Beweis von A ist naheliegend; der von B gelingt nach der durch Du Bois-Reymond und Herrn Lebesgue wohlbekannten Kondensationsmethode zur Konstruktion divergenter Fourierreihen ohne Schwierigkeiten.

Zu dieser Methode ist übrigens die Bohrsche das durchaus sinngemäße Analogon für Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises.

[4]) In diesen schließe ich mich an das Vorhandene möglichst an, setze übrigens auch den Inhalt der zitierten Arbeiten voraus.

[5]) Landau, § 2.

$$f_n(x) = \frac{x^n P_n(1/x)}{P_n(x)},$$

$f_n(x)$ regulär und $|f_n(x)| \leqq 1$ für $|x| \leqq 1$.

er sei[6]) für alle reellen φ

$$\Phi_n(\varphi) = e^{-n\varphi i} P_n^2(e^{\varphi i}), \quad \text{also} \quad \Phi_n(\varphi) f_n(e^{\varphi i}) = |\Phi_n(\varphi)|,$$

aß[5, 6])

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_n(\varphi) f_n(e^{\varphi i})\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\Phi_n(\varphi)|\, d\varphi = G_n$$

Konstruktion von $f(x)$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir voraus, daß $L_n \leqq G_n$ ür alle $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Es sei $h_0(x) = 0$ für alle x, $m_0 = 1$, n_0 positiv ganz und so groß,

$$\frac{1}{8} L_{n_0} \geqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\varphi} (1 - e^{-2m_0 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi} \cos(m_0 \sin\varphi))\, d\varphi \,(> 0),$$

r $\delta_{-1} = \pi$ und δ_0 positiv, $< \frac{1}{2}\delta_{-1}$ und so klein, daß

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta_0}^{\delta_0} |\Phi_{n_0}(\varphi)|\, d\varphi \leqq \frac{1}{8} L_{n_0},$$

ch μ_0 positiv und so klein, daß

$$\frac{\mu_0 \sqrt{2}}{\sqrt{\sin \frac{1}{2}\delta_0}} \leqq \frac{1}{16} \frac{L_{n_0}}{G_{n_0}}.$$

eßlich bedeute eine von $k = a$ (ganz) bis $k = b$ (ganz) erstreckte me stets Null, falls $a > b$ ist.

Dann sind durch Vorstehendes, zunächst im Falle $p = 0$, für $0, 1, \ldots, p$ solche Funktionen $h_k(x)$, natürliche Zahlen m_k, n_k und ive Zahlen μ_k, sowie solche positive Zahlen $\delta_{-1}, \delta_0, \ldots, \delta_p$ definiert, folgende Beziehungen bestehen:

$$\left.\begin{array}{r} h_p(x) \text{ ist regulär} \\ |h_p(x)| \leqq e^{-m_p(1-u)} \cdot e^{-\mu_p/\sqrt[4]{1-u}} \end{array}\right\} \text{für } |x| \leqq 1,\ \Re(x) = u < 1,$$

$$|h_p(e^{\varphi i})| \leqq e^{-\mu_p/\sqrt{|\varphi|}} \quad \text{für } \varphi \text{ reell}, \ 0 < |\varphi| \leqq \pi,$$

[6]) Bohr, I § 2 oder II § 1.

$$(4)\qquad |h_p(x)| \leqq \frac{1}{\mathfrak{S}} \cdot \min_{k=0,1,\ldots,p-1}{}^{7)} \frac{1}{2^{p-k}} \cdot \frac{L_{n_k}}{G_{n_k}} \quad \text{für } |x| \leqq 1,\ \Re(x) \leqq \cos \delta_{p-1},$$

$$(5)\qquad \sum_{k=1}^{p} |h_k(x)| < 1 \qquad \text{für } |x| \leqq 1,\ \Re(x) < 1,$$

$$(6)\qquad \frac{1}{8} L_{n_p} > \frac{1}{2\pi} \int_{\delta_{p-1}}^{2\pi-\delta_{p-1}} \frac{d\varphi}{\sin^2 \frac{1}{2}\varphi} (\geqq 0),$$

$$(7)\qquad \frac{1}{8} L_{n_p} \geqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\varphi} \sum_{k=1}^{p-1} e^{-\mu_k/\sqrt{|\varphi|}}\, d\varphi,$$

$$(8)\qquad \frac{1}{8} L_{n_p} \geqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\varphi} (1 - e^{-2m_p \sin^2 \frac{1}{2}\varphi} \cos(m_p \sin \varphi))\, d\varphi,$$

$$(9)\qquad 0 < \delta_p < \frac{1}{2}\delta_{p-1} \leqq \frac{\pi}{2},$$

$$(10)\qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta_p}^{\delta_p} |\Phi_{n_p}(\varphi)|\, d\varphi \leqq \frac{1}{8} L_{n_p},$$

$$(11)\qquad \frac{\mu_p \sqrt{2}}{\sqrt{\sin \frac{1}{2}\delta_p}} \leqq \frac{1}{16} \frac{L_{n_p}}{G_{n_p}},\ \text{also} \leqq 1$$

wegen der Voraussetzung $L_n \leqq G_n$.

Wir nehmen nunmehr an, daß $p > 0$ ist, und in den Fällen $0, 1, \ldots, p-1$ statt p die Funktionen und Zahlen mit den vorstehenden Eigenschaften definiert sind. Dann wollen wir zeigen, daß auch die Funktion $h_p(x)$ und die Zahlen m_p und n_p positiv ganz, δ_p und μ_p positiv so definiert werden können, daß die Beziehungen (1) bis (11) gelten[8]).

Die Funktion $h_p(x)$ wird die Gestalt haben

$$(12)\qquad h_p(x) = e^{-m_p(1-x)} \cdot e^{-2\mu_p/\sqrt{1-x}} \cdot f_{n_p}(x),$$

wo $f_n(x)$ die Landausche Funktion ist, $\sqrt{1-x}$ den in der Halbebene $\Re(x) < 1$ regulären und von Null verschiedenen Hauptwert der Wurzel bedeutet und die Zahlen m_p, n_p, μ_p noch festzulegen sind[9]). Unabhängig von deren Werten ergibt sich aus (12) ohne weiteres, daß (1) erfüllt ist.

---

[7]) Dies bedeute z. B. 0, falls $p = 0$ ist.

[8]) Beim Zitieren derselben deuten wir durch Zufügung eines * an, daß darin $p-1$ (oder $0, 1, \ldots, p-1$) statt p zu setzen ist.

[9]) Bei diesem Ansatz besteht der Grundgedanke, den ich von Herrn Bohr (II, S. 122, Z. 2) übernehme, darin, daß für eine passende Folge $n = n_p$ natürlicher Zahlen die Landausche Funktion $f_n(x)$ sowohl in einer Halbebene $\Re(x) \leqq \cos \delta_p$ ($\delta_p \to 0$

Wenn weiter $d = |1 - x|$ ist, und ϑ den im positiven Sinne ge-
neten Winkel vom Strahl aus 1 nach 0 zum Strahl aus 1 nach x
eutet, so ist in unserer Halbebene $|\vartheta| < \frac{1}{2}\pi$ und deshalb

$$\left|e^{-2\mu_p/\sqrt{1-x}}\right| = e^{-\frac{2\mu_p}{\sqrt{d}}\cos\frac{1}{2}\vartheta} \leqq e^{-\frac{\mu_p\sqrt{2}}{\sqrt{d}}}$$

raus folgt, da im Kreise $|x| \leqq 1$ stets $d \leqq 2\sqrt{1-u}$ ist,

$$\left|e^{-2\mu_p/\sqrt{1-x}}\right| \leqq e^{-\mu_p/\sqrt[4]{1-u}} \quad \text{für } |x| \leqq 1,\ \Re(x) = u < 1,$$

l also aus (12), mit Rücksicht auf die vierte Formelzeile der Bezeich-
gen, die Richtigkeit von (2). Eine Folge von (2) ist (3), denn für
$e^{\varphi i}$ (φ reell, $0 < |\varphi| \leqq \pi$) ist

$$0 < 1 - u = 2\sin^2\frac{1}{2}\varphi \leqq \varphi^2, \quad \text{also} \quad \sqrt[4]{1-u} \leqq \sqrt{|\varphi|}.$$

Um jetzt (4) und (5) zu erfüllen, beachten wir, daß nach (2)* für
$= 0, 1, \ldots, p-1$

$$|h_k(x)| \leqq e^{-\mu_k/\sqrt[4]{1-u}} \leqq \frac{5!}{\mu_k^5}(1-u)\sqrt[4]{1-u}$$

so daß es mit Rücksicht auf (9)* einen positiven echten Bruch
$\geqq \cos\delta_{p-1}$ gibt der Art, daß

$$\sum_{k=1}^{p-1}|h_k(x)| \leqq 1 - u \quad \text{für } |x| \leqq 1,\ \Re(x) = u \geqq \gamma.$$

nn besitzt im abgeschlossenen Gebiete $|x| \leqq 1$, $\Re(x) \leqq \gamma$ die daselbst
h (1)* stetige Funktion $\sum_{k=1}^{p-1}|h_k(x)|$ ein Maximum ε, das wegen (5)*
iner ist als 1. Weiter ist nach (2) $|h_p(x)| \leqq e^{-m_p(1-u)}$. Legen wir
o die natürliche Zahl m_p auf einen Wert fest, wofür zugleich

$$e^{-m_p(1-\gamma)} < 1 - \varepsilon, \ < \gamma \text{ und } \leqq \text{ rechte Seite von (4)}$$

zztere ist positiv, da $p \geqq 1$, und wegen (6)* die Zahlen $L_{n_0}, L_{n_1}, \ldots, L_{n_{p-1}}$
> 0 sind), so ist (weil $\cos\delta_{p-1} \leqq \gamma$) (4) erfüllt und $\sum_{k=1}^{p}|h_k(x)|$ im
eise $|x| \leqq 1$

auch in einer gewissen Umgebung von $x = 1$ so zu einer Funktion $h_p(x)$ modi-
ert wird, daß ihre n_p-te Partialsumme die Landausche Grenze G_{n_p} noch aus-
hend approximiert, während zugleich (hauptsächlich infolge der ersten Modifi-
ion) $\sum h_p(x)$ in jedem Gebiete $|x| \leqq 1$, $\Re(x) \leqq \eta < 1$ gleichmäßig konvergent wird.

$$\text{für} \quad \Re(x) \leqq \gamma: \quad < \varepsilon + (1-\varepsilon) = 1,$$
$$\text{für} \quad \gamma \leqq \Re(x) < 1: \quad < (1-u) + u = 1\ ^{10}),$$

also auch (5) erfüllt.

Betrachten wir jetzt die rechten Seiten von (6), (7), (8), so stehen dort, da alle auftretenden Parameter festgelegt sind, und die Integrale sämtlich einen Sinn haben, feste Zahlen. Wegen $L_n \to \infty$ können wir daher n_p positiv ganz so festlegen, daß (6), (7), (8) erfüllt sind.

Nunmehr kann δ_p positiv und so klein gewählt werden, daß (9) und (10) erfüllt sind, und darauf μ_p positiv und so klein, daß (11) besteht.

Durch die hiermit beendete Induktion haben wir eine Folge von Funktionen $h_p(x)$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ erhalten, und wollen nun zeigen, daß durch

$$\text{(13)} \qquad \sum_{p=1}^{\infty} h_p(x) \quad \text{für} \quad |x| \leqq 1, \quad \Re(x) < 1$$

eine Funktion $f(x)$ definiert wird, die unseren Satz V beweist.

Eigenschaften von $f(x)$.

Da nach (4) und (9), wenn $q = 1, 2, 3, \ldots$ ist, für jedes $p \geqq q+1$

$$|h_p(x)| \leqq \frac{1}{2^p} \cdot \frac{L_{n_0}}{G_{n_0}} \text{ im Gebiete } |x| \leqq 1, \ \Re(x) \leqq \cos \delta_q,$$

so konvergiert die Reihe (13) gleichmäßig in jedem derselben; sie definiert also wegen (1) (und (9)) eine für $|x| < 1$ reguläre, für $|x| \leqq 1$ und $\Re(x) < 1$ obendrein stetige Funktion $f(x)$.

Für dieselbe ergibt sich aus (5) sofort, daß

$$\text{(14)} \qquad |f(x)| \leqq 1 \quad \text{für} \quad |x| < 1;$$

daß hierin das Gleichheitszeichen nicht gelten kann (in welchem Falle $f(x) = \text{konst.}$, und zwar $|f(x)| = 1$ wäre), folgt daraus, daß nach (4)

$$|f(-1)| \leqq \sum_{p=1}^{\infty} |h_p(-1)| \leqq \frac{1}{8} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} \cdot \frac{L_{n_0}}{G_{n_0}} = \frac{1}{8} \frac{L_{n_0}}{G_{n_0}} \leqq \frac{1}{8}$$

ist, letzteres nach der zu Beginn der Konstruktion gemachten Voraussetzung über die L_n. Satz V ist daher bewiesen, sobald gezeigt ist, daß

$$\text{(15)} \qquad |s_{n_p}| \geqq G_{n_p} - L_{n_p} \quad \text{für} \quad p = 1, 2, 3, \ldots;$$

denn unter den Indizes n_p sind unendlich viele verschiedene, da nach (9) $\delta_p \to 0$, und infolgedessen nach (6) $L_{n_p} \to \infty$. — Dem Beweise von (15) schicken wir noch eine

---

[10]) Dies, weil $e^{-m_p(1-u)}$ gegen die u-Achse konvex ist.

Zwischenrechnung

oraus. Dieselbe soll zeigen, daß für $p = 1, 2, 3, \ldots$

16) $$J_p = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\delta_{p-1}}^{-\delta_p} + \int_{\delta_p}^{\delta_{p-1}} \Phi_{n_p}(\varphi)\, h_p(e^{\varphi i})\, d\varphi\right| \geqq G_{n_p} - \frac{4}{8} L_{n_p}.$$

Zunächst ist wegen der fünften Formelzeile der Bezeichnungen und ach (12) der Integrand

$$= |\Phi_{n_p}(\varphi)| \cdot e^{-m_p(1-e^{\varphi i})} \cdot e^{-2\mu_p/\sqrt{1-e^{\varphi i}}}.$$

Daher wird

17) $$\begin{cases} J_p \geqq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\delta_{p-1}}^{-\delta_p} + \int_{\delta_p}^{\delta_{p-1}} |\Phi_{n_p}(\varphi)|\, e^{-m_p(1-e^{\varphi i})}\, d\varphi\right| \\ \quad - \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\delta_{p-1}}^{-\delta_p} + \int_{\delta_p}^{\delta_{p-1}} |\Phi_{n_p}(\varphi)|\, e^{-m_p(1-e^{\varphi i})}\left(1 - e^{-2\mu_p/\sqrt{1-e^{\varphi i}}}\right) d\varphi\right|. \end{cases}$$

Da nun im Integrationsgebiete nach (11)

$$\left|\frac{2\mu_p}{\sqrt{1-e^{\varphi i}}}\right| = \frac{\mu_p\sqrt{2}}{\sqrt{|\sin\frac{1}{2}\varphi|}} \leqq \frac{\mu_p\sqrt{2}}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}\delta_p}} \leqq 1,$$

nd falls $|z| \leqq 1$, stets $|1 - e^z| \leqq 2|z|$ ist, ergibt sich unter Benutzung er schärferen Abschätzung aus (11), daß in (17) der Subtrahend

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\Phi_{n_p}(\varphi)| \cdot 1 \cdot \frac{1}{8}\frac{L_{n_p}}{G_{n_p}}\, d\varphi = {}^{11}) \frac{1}{8}\frac{L_{n_p}}{G_{n_p}} G_{n_p} = \frac{1}{8} L_{n_p}.$$

Deshalb ist

$$J_p \geqq \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\delta_{p-1}}^{-\delta_p} + \int_{\delta_p}^{\delta_{p-1}} |\Phi_{n_p}(\varphi)|\, \Re\left(e^{-m_p(1-e^{\varphi i})}\right) d\varphi\right\} - \frac{1}{8} L_{n_p}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\delta_{p-1}}^{-\delta_p} + \int_{\delta_p}^{\delta_{p-1}} |\Phi_{n_p}(\varphi)|\, d\varphi\right\} - \frac{1}{8} L_{n_p}$$

$$- \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\delta_{p-1}}^{-\delta_p} + \int_{\delta_p}^{\delta_{p-1}} |\Phi_{n_p}(\varphi)| \cdot \left(1 - e^{-2m_p \sin^2\frac{1}{2}\varphi} \cdot \cos(m_p \sin\varphi)\right) d\varphi\right\}.$$

[11]) Nach der letzten Formelzeile der Bezeichnungen.

Da im Intervall $(-\pi, \pi)$ der letzte Integrand $\geqq 0$ ist, sowie[12])

$$(18) \qquad |\Phi_{n_p}(\varphi)| = |P_n(e^{\varphi i})|^2 \leqq \frac{4}{|1-e^{\varphi i}|^2} = \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\varphi} \qquad (0 < |\varphi| \leqq \pi),$$

so wird das zugehörige Glied

$$\leqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\varphi} \left(1 - e^{-2m_p \sin^2 \frac{1}{2}\varphi} \cdot \cos(m_p \sin \varphi)\right) d\varphi \leqq \frac{1}{8} L_{n_p},$$

letzteres nach (8). Also ist schließlich

$$J_p \geqq \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\delta_{p-1}}^{-\delta_p} + \int_{\delta_p}^{\delta_{p-1}} |\Phi_{n_p}(\varphi)|\, d\varphi \right\} - \frac{2}{8} L_{n_p}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{0}^{2\pi} - \int_{\delta_{p-1}}^{2\pi-\delta_{p-1}} - \int_{-\delta_p}^{\delta_p} |\Phi_{n_p}(\varphi)|\, d\varphi \right\} - \frac{2}{8} L_{n_p}$$

$$\geqq G_{n_p} - \int_{\delta_{p-1}}^{2\pi-\delta_{p-1}} \frac{d\varphi}{\sin^2 \frac{1}{2}\varphi} - \frac{3}{8} L_{n_p} \geqq G_{n_p} - \frac{4}{8} L_{n_p},$$

letzteres wegen (18), (10) und (6). Nachdem hiermit (16) bewiesen ist, gelingt die

Diskussion der Partialsummen,

d. h. der Beweis der Beziehung (15), mühelos:

Es ist nach der zweiten Formelzeile der Bezeichnungen, weil infolge der Beschränktheit von $f(x)$ für $|x| \leqq 1$ der $\lim r = 1$ erlaubt ist,

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-n\varphi i} P_n^2(e^{\varphi i}) f(e^{\varphi i})\, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_n(\varphi) f(e^{\varphi i})\, d\varphi.$$

Also ist für $p = 1, 2, 3, \ldots$

$$|\varepsilon_{n_p}| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\delta_{p-1}}^{-\delta_p} + \int_{\delta_p}^{\delta_{p-1}} + \int_{-\delta_p}^{\delta_p} + \int_{\delta_{p-1}}^{2\pi-\delta_{p-1}} \Phi_{n_p}(\varphi) f(e^{\varphi i})\, d\varphi \right|$$

$$\geqq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\delta_{p-1}}^{-\delta_p} + \int_{\delta_p}^{\delta_{p-1}} \Phi_{n_p}(\varphi) \left(h_p(e^{\varphi i}) + \sum_{k=1}^{p-1} h_k(e^{\varphi i}) + \sum_{p+1}^{\infty} h_k(e^{\varphi i}) \right) d\varphi \right|$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta_p}^{\delta_p} |\Phi_{n_p}(\varphi)|\, d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_{\delta_{p-1}}^{2\pi-\delta_{p-1}} \frac{d\varphi}{\sin^2 \frac{1}{2}\varphi},$$

[12]) Dies folgt daraus, daß die Koeffizienten von $P_n(x)$ positiv sind und von 1 an monoton abnehmen, durch partielle Summation.

tzteres nach (14) wegen der Stetigkeit von $f(x)$, sowie nach (18). Da un nach (4) für $r = 1, 2, 3, \ldots$

$$|h_{p+r}(x)| \leqq \frac{1}{8 \cdot 2^r} \frac{L_{n_p}}{G_{n_p}} \text{ für } |x| \leqq 1, \quad \Re(x) \leqq \cos \delta_p \leqq \cos \delta_{p+r-1},$$

o ergibt sich mit Rücksicht auf (16), (18), (3), (10), (6)

$$|s_{n_p}| \geqq \left(G_{n_p} - \frac{4}{8} L_{n_p}\right) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\varphi} \sum_{k=1}^{p-1} e^{-\mu_k \sqrt{|\varphi|}} d\varphi$$

$$- \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{8 \cdot 2^r} \frac{L_{n_p}}{G_{n_p}}\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi_{n_p}(\varphi)| \, d\varphi - \frac{1}{8} L_{n_p} - \frac{1}{8} L_{n_p}$$

nd nach (7), sowie der letzten Gleichung der Bezeichnungen

$$|s_{n_p}| \geqq G_{n_p} - \frac{6}{8} L_{n_p} - \frac{1}{8} L_{n_p} - \frac{1}{8} \frac{L_{n_p}}{G_{n_p}} G_{n_p} = G_{n_p} - L_{n_p},$$

womit unser Ziel, die Beziehung (15) bewiesen ist.

Göttingen, den 19. Oktober 1920.

(Eingegangen am 20. Oktober 1920.)

Der Ursprung des Zahlbegriffs.

Von

M. Pasch in Gießen.

Fortsetzung der im Archiv der Mathematik und Physik 1919, Bd. 28, S. 17—33 erschienenen Abhandlung (abgeschlossen 1916).

§ 11.

Rotten von Dingen.

41. Wie in § 10 mögen Geschehnisse A vorliegen, jetzt aber nicht Geschehnisse beliebiger Art; vielmehr soll jedes A „Angabe eines Dinges" sein. Die A sind also jetzt Angaben von Dingen oder eines Dinges. Die Kette der A nenne ich wieder $\mathfrak{A}$.

Ich beschäftige mich bis auf weiteres nur mit dem Fall, daß die Gegenstände der Angaben A durchweg voneinander verschieden sind. Diesen Gegenständen erteile ich den Sammelnamen A. Die Kette $\mathfrak{A}$ der Angaben A nenne ich eine Rotte[1]), und zwar eine Rotte der Dinge A.

Die Kette $\mathfrak{A}$ darf ich jetzt auch „die Rotte $\mathfrak{A}$ der Dinge A" nennen, auch kurz: die Rotte $\mathfrak{A}$, aber nicht: „die" Rotte der Dinge A, weil — wie in § 12 Nr. 47 und 48, allgemein in § 13 Nr. 58 dargelegt werden wird — $\mathfrak{A}$ nicht die einzige aus den Dingen A mögliche Rotte ist.

42. Durch die Rotte $\mathfrak{A}$ sind die Angaben A bestimmt (§ 10 Nr. 36), durch diese die Dinge A (§ 2). Indem ich die A als *Glieder der Rotte* $\mathfrak{A}$ bezeichne, bin ich hiernach berechtigt, sie „die" Glieder von $\mathfrak{A}$ zu nennen (vgl. § 10 Nr. 37). Zum Namen $\mathfrak{A}$ gesellt sich der Name „Glied der Rotte $\mathfrak{A}$" als ein mit A gleichbedeutender Sammelname.

Statt: das Ding a ist ein Glied von $\mathfrak{A}$, sage ich auch: die Rotte $\mathfrak{A}$

---

[1]) Statt des in § 3 Def. 6 der Grundlagen der Analysis gewählten Wortes „Reihe" wähle ich hier das Wort „Rotte", um zu den verschiedenen üblichen Bedeutungen des Wortes „Reihe" nicht noch eine neue hinzuzufügen.

nthält das Ding a, a ist in $\mathfrak{A}$ enthalten, *a kommt in $\mathfrak{A}$ vor*. Statt: kommt in $\mathfrak{A}$ nicht vor, sage ich auch: *a fehlt in $\mathfrak{A}$*.

43. Sind a und b Glieder der Rotte $\mathfrak{A}$, so ist in $\mathfrak{A}$ entweder die Angabe von a die frühere oder die Angabe von b. Ist die Angabe von die frühere, so sage ich: a ist in $\mathfrak{A}$ vor b angegeben, a geht in $\mathfrak{A}$ vor voran, a steht in $\mathfrak{A}$ vor b, u. dgl.

In derselben Weise übertrage ich auf die Glieder der Rotte die Begriffe: erstes, letztes, zwischen, nächstfolgend, nächstvorhergehend, benachbart. Das erste Glied heißt auch *Anfangsglied*, das letzte *Endglied*. Die Rotte *beginnt* (fängt an) mit dem ersten, sie *endet* (schließt) mit dem letzten Glied.

Anfangs- und Endglied nenne ich *äußere Glieder*, jedes andere Glied ein *inneres*.

44. Den Begriff „Rotte $\mathfrak{A}$ der Dinge A“ erwerbe ich erst, wenn Angaben aller A erfolgt sind (§ 10 Nr. 39). Die Rotte $\mathfrak{A}$ ist demnach ein von den Dingen A verschiedenes Ding, sie enthält nicht sich selbst.

Die Rotte $\mathfrak{A}$ ist (§ 10 Nr. 39) kein Geschehnis, insbesondere keine Angabe. Ich kann $\mathfrak{A}$ selbst zum Gegenstand einer Angabe machen; einer solchen Angabe müssen aber Angaben aller Glieder von $\mathfrak{A}$ vorangegangen sein.

45. Wie in § 10 Nr. 40 sei $\mathfrak{P}$ eine Paarkette, die aus Geschehnissen α' und β' besteht; diese Geschehnisse sollen aber jetzt Angaben sein, a' der Gegenstand von α', b' der von β', a' von b' verschieden. Dann ist $\mathfrak{P}$ eine „Rotte“; ich nenne $\mathfrak{P}$ eine *Paarrotte*. In der Paarrotte sind a' und b' benachbart, und zwar ist entweder a' erstes Glied und b' letztes, oder b' erstes und a' letztes.

Ist die Paarrotte $\mathfrak{P}$ eine Paarkette aus $\mathfrak{A}$ (§ 10 Nr. 40), so nenne ich sie eine „Paarrotte aus $\mathfrak{A}$“. Paarrotte aus $\mathfrak{P}$ ist nur $\mathfrak{P}$ selbst.

In $\mathfrak{A}$ benachbarte Glieder sind die Glieder einer und nur einer Paarrotte aus $\mathfrak{A}$; eine solche Paarrotte nenne ich eine „*Nachbarrotte aus $\mathfrak{A}$*“. Nachbarrotte aus einer Parrotte ist nur die Paarrotte selbst.

§ 12.

Nachbarrotten.

46. Es sei α eine Angabe des Dinges a, β eine spätere Angabe des von a verschiedenen Dinges b; die aus den Geschehnissen α und β bestehende Kette heiße $\mathfrak{B}$. Dann ist $\mathfrak{B}$ eine Paarrotte aus a und b, und zwar eine mit a beginnende.

Nach β gebe ich a abermals an (§ 9 Nr. 32), durch eine Angabe α'; nach α' gebe ich b abermals an, durch eine Angabe β'. Die Kette aus

β, α' heiße $\mathfrak{B}_0$, die Kette aus α', β' heiße $\mathfrak{B}'$. Wie $\mathfrak{B}$ sind $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}'$ Paarrotten aus a und b; aber während $\mathfrak{B}'$ mit a beginnt, wie $\mathfrak{B}$, beginnt $\mathfrak{B}_0$ mit b. Das Bilden solcher Paarrotten kann beliebig fortgesetzt werden.

47. Ich habe hier für den allereinfachsten Fall *verschiedene* Rotten erhalten, die genau dieselben Glieder besitzen; vgl. § 11 Nr. 41. Dabei zeigte sich ein Unterschied, der zur Einführung eines neuen Begriffs veranlaßt: Jede Paarrotte, deren Glieder die Glieder der Paarrotte $\mathfrak{B}$ sind, und die mit dem Anfangsglied von $\mathfrak{B}$ beginnt, nenne ich *mit* $\mathfrak{B}$ *konform*.

Jede Paarrotte ist mit sich selbst konform. Ist eine Paarrotte mit einer anderen konform, so gilt auch das Umgekehrte. Paarrotten, die mit einer Paarrotte konform sind, sind unter sich konform.

Die Paarrotten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_0$ in Nr. 46 sind nicht konform, ebensowenig $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}_0$, das Anfangsglied von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ ist Endglied von $\mathfrak{B}_0$ und umgekehrt. Eine Paarrotte, die mit dem Endglied einer anderen Paarrotte beginnt und mit ihrem Anfangsglied endigt, heißt eine *Umkehrung* der andern; auch dies ist gegenseitig. Die Umkehrungen einer Paarrotte sind die mit ihr nicht konformen Paarrotten derselben Dinge.

48. Nach den Angaben α und β kann ich (§ 9 Nr. 31) ein von a und b verschiedenes Ding c angeben, durch eine Angabe γ. Ich erhalte dadurch eine Kette $\mathfrak{C}$, die eine Rotte der Dinge a, b, c ist. Nach γ gebe ich a abermals an, durch eine Angabe α''; nach α'' gebe ich b abermals an, durch eine Angabe β''; nach β'' gebe ich c abermals an, durch eine Angabe γ'. Ich nenne $\mathfrak{C}_0$ die Kette aus β, γ, α''; $\mathfrak{C}_1$ die aus $\gamma, \alpha'', \beta''$; $\mathfrak{C}'$ die aus $\alpha'', \beta'', \gamma'$.

Die Ketten $\mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}'$ sind Rotten, die genau dieselben Glieder haben wie $\mathfrak{C}$. Das Bilden solcher Rotten aus a, b, c kann beliebig fortgesetzt werden. Wie in Nr. 47 habe ich verschiedene Rotten derselben Dinge vor mir; ich verweise wieder auf § 11 Nr. 41.

Anmerkung. Die hier mit α'' bezeichnete Angabe von a folgt auf γ, mithin auch auf β. Nun habe ich schon in Nr. 46 eine auf β folgende Angabe α' von a eingeführt; es ist also sehr wohl möglich, daß das Geschehnis α'' gar kein anderes ist, als das schon mit dem Namen α' belegte, daß also α' und α'' „gleichbedeutende“ Eigennamen sind. Hier erweist sich die Zulassung verschiedener Eigennamen für dasselbe Ding gemäß § 1 Nr. 3 als zweckmäßig; sie überhebt mich in Nr. 48, wo ich auf γ eine Angabe von a folgen lasse, der Notwendigkeit, den Fall, wo diese Angabe mit α' zusammenfällt, vom gegenteiligen Fall durch die Bezeichnungsweise zu unterscheiden. Weitere Verwicklung würde in Nr. 48 entstehen, wenn ich in bezug auf β'' wieder eine Unterscheidung machen müßte. Dazu käme in Nr. 50 die Möglichkeit, daß $\mathfrak{P}'$ mit $\mathfrak{B}$ zusammenfällt.

49. Die Paarkette $\mathfrak{B}$ der Geschehnisse α, β ist eine Paarrotte aus $\mathfrak{C}$, eren Glieder a, b in $\mathfrak{C}$ benachbart sind; eine solche Paarrotte $\mathfrak{B}$ ist eine *achbarrotte* aus $\mathfrak{C}$ (§ 11 Nr. 45).

Außer $\mathfrak{B}$ kann ich nur noch *eine* Nachbarrotte aus $\mathfrak{C}$ entnehmen: ie Paarkette $\mathfrak{Q}$ der Geschehnisse β, γ; ihre Glieder sind b, c. Außerdem ann ich aus $\mathfrak{C}$ nur noch *eine* Paarrotte entnehmen, die Paarkette der eschehnisse α, γ; diese ist jedoch keine Nachbarrotte.

Nachbarrotte einer Paarrotte ist nur sie selbst (§ 11 Nr. 45).

50. Wie ich aus $\mathfrak{C}$ die Nachbarrotten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{Q}$ erhielt, so erhalte ich achbarrotten $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}_0$ aus $\mathfrak{C}_0$; $\mathfrak{Q}_0$ und $\mathfrak{Q}_1$ aus $\mathfrak{C}_1$; $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{Q}'$ aus $\mathfrak{C}'$. ber nur aus $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ kann ich lauter konforme Nachbarrotten ent- ehmen: $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$. Dagegen ist zwar $\mathfrak{Q}$ konform mit sich lbst, aber $\mathfrak{Q}_0$ nicht mit $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{Q}_1$ mit $\mathfrak{B}$, aber $\mathfrak{Q}_0$ nicht mit $\mathfrak{Q}$.

Ist jede Nachbarrotte aus einer Rotte $\mathfrak{R}$ der Dinge a, b, c konform it einer Nachbarrotte aus $\mathfrak{C}$, so nenne ich die Rotte $\mathfrak{R}$ *konform mit* $\mathfrak{C}$. iese Beziehung ist gegenseitig. Jede Rotte der Dinge a, b, c ist mit ch selbst konform. Rotten der Dinge a, b, c, die mit einer Rotte kon- rm sind, sind unter sich konform.

Hiernach sind die Rotten $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ konform. Dagegen sind nicht nform: $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}_1$; schon deshalb sind nicht nform: $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}'$.

51. Nach der Rotte $\mathfrak{B}$ konnte ich eine konforme Rotte $\mathfrak{B}'$ bilden. benso wird nach $\mathfrak{B}_0$ eine mit $\mathfrak{B}_0$ konforme Rotte $\mathfrak{B}_0'$ möglich sein; $\mathfrak{B}_0'$ ist dann — wie $\mathfrak{B}'$ — später als $\mathfrak{B}$, aber nicht mit $\mathfrak{B}$ konform, weil nst $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_0$ konform sein müßten. Also:

Nach der Rotte $\mathfrak{B}$ kann ich sowohl konforme, als auch nicht kon- rme Rotten derselben Dinge a, b bilden.

Nach der Rotte $\mathfrak{C}$ konnte ich eine konforme Rotte $\mathfrak{C}'$ bilden. Ebenso ird z. B. nach $\mathfrak{C}_0$ eine mit $\mathfrak{C}_0$ konforme Rotte $\mathfrak{C}_0'$ möglich sein; $\mathfrak{C}_0'$ ist ann — wie $\mathfrak{C}'$ — später als $\mathfrak{C}$, aber nicht mit $\mathfrak{C}$ konform, weil sonst $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_0$ konform sein müßten. Also:

Nach der Rotte $\mathfrak{C}$ kann ich sowohl konforme, als auch nicht kon- rme Rotten derselben Dinge a, b, c bilden.

§ 13.

Abschreiten einer Rotte.

52. Die Rotte $\mathfrak{C}$ des § 12 enthielt als Glieder die Dinge a, b, c und ur diese; die Rotte beginnt mit a, darauf folgt b, darauf c. Nach der otte $\mathfrak{C}$ konnte ich aus a, b, c eine mit $\mathfrak{C}$ konforme Rotte $\mathfrak{C}'$ bilden, ndem ich das in $\mathfrak{C}$ erste Glied a nochmals angab, nach a das in $\mathfrak{C}$ nächst-

folgende b, nach b das in $\mathfrak{C}$ nächstfolgende c. Das Angeben von b nach a kann ich einen „Übergang von a zu b“ nennen. Ich kann also sagen: Ich habe a nochmals angegeben und bin von jedem nochmals angegebenen Glied der Rotte $\mathfrak{C}$, das nicht letztes ist, zum nächstfolgenden übergegangen.

Die Rotte $\mathfrak{C}$ schloß sich unmittelbar an die Rotte allereinfachster Art an, nämlich an die Paarrotte $\mathfrak{B}$ des § 12. Auch nach $\mathfrak{B}$ konnte ich eine konforme Rotte $\mathfrak{B}'$ bilden, indem ich a nochmals angab und von a zu b „überging“.

53. Die Kette von Geschehnissen, die hierbei das eine Mal nach der Rotte $\mathfrak{B}$, das andre Mal nach der Rotte $\mathfrak{C}$ abläuft, läßt sich für beide Rotten durch dieselben Worte beschreiben: Ich gebe das erste Glied der Rotte nochmals an und gehe von jedem nochmals angegebenen Glied, das nicht letztes ist, zum nächstfolgenden über.

Derartige Ketten von Geschehnissen kann ich immer wieder erzeugen. Ich will das Erzeugen einer derartigen Kette ein *Abschreiten der Rotte* $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{C}$ nennen. Für die Rotten der einfachsten Art, wie die hier benutzten, ist das Abschreiten allemal möglich, und zwar führt es zu *allen* Gliedern der ursprünglichen Rotte, indem es diese Glieder zu einer mit der ursprünglichen Rotte konformen Rotte verbindet.

54. Lasse ich auf $\mathfrak{C}$ eine Angabe eines von a, b, c verschiedenen Dinges d folgen, so erhalte ich eine Rotte $\mathfrak{D}$ der Dinge a, b, c, d. Indem ich die in § 12 an der Rotte $\mathfrak{C}$ angestellte Betrachtung der Rotte $\mathfrak{D}$ anpasse, finde ich, daß auch für $\mathfrak{D}$ das „Abschreiten“ möglich ist, und daß es wieder den in Nr. 53 geschilderten Erfolg hat.

Ich kann ein von a, b, c, d verschiedenes Ding e hinzunehmen und für die so erweiterte Rotte zum gleichen Ergebnis gelangen. Aber wenn ich auf diesem Wege, von Rotte zu Rotte fortschreitend, die obige Erscheinung immer wieder bestätigt finde, so kann ich doch auf diesem Wege niemals einen Abschluß erreichen; ob das, was ich für die durchgeprüften Fälle beweisen konnte, für alle andern Fälle ebenfalls gelten muß, bleibt eine offene Frage.

55. Wenn ich die eben gestellte Frage bejahe, so hat diese Entscheidung nur den besonders in § 3 Nr. 10 und § 4 Nr. 12 erörterten Sinn. Wie bei gewissen zurückliegenden Gelegenheiten, halte ich mich hier zu einer Verallgemeinerung berechtigt. Diese lautet:

Ist $\mathfrak{A}$ irgend eine Rotte, so kann ich nach $\mathfrak{A}$ das erste Glied von $\mathfrak{A}$ nochmals angeben und von jedem nochmals angegebenen Glied, das nicht letztes ist, zu dem in $\mathfrak{A}$ nächstfolgenden übergehen; ich erhalte dadurch eine Rotte $\mathfrak{A}'$, deren Glieder dieselben sind, wie die der Rotte $\mathfrak{A}$, und deren Nachbarrotten konform sind mit den Nachbarrotten aus $\mathfrak{A}$. Also, wenn ich das Wort „*Abschreiten*“ jetzt allgemein anwende:

Ist $\mathfrak{A}$ irgend eine Rotte, so ist es nach $\mathfrak{A}$ möglich, $\mathfrak{A}$ abzuschreiten. Das Abschreiten liefert alle Glieder von $\mathfrak{A}$, und zwar als Glieder einer neuen Rotte $\mathfrak{A}'$. Die Nachbarrotten aus $\mathfrak{A}'$ sind konform mit denen aus $\mathfrak{A}$.

56. Wenn ich ein Wort niederschreibe, das aus lauter verschiedenen Buchstaben besteht, so bilde ich eine Rotte, deren Glieder Buchstaben sind. Indem ich die Niederschrift lese, schreite ich diese Rotte ab; ich gehe an das Lesen in der Gewißheit, daß das Abschreiten möglich ist und mir das Wort wieder liefert. Entsprechendes gilt für den Satz, für das Buch. Unbedenklich bin ich bereit, diese Zuversicht auf die Bücherei auszudehnen, wie groß ihr Umfang auch sein mag. Mit Zeit brauche ich als der in § 1 Nr. 1 vorausgesetzte Mensch nicht zu sparen.

Daß in dieser Zuversicht die Anerkennung eines besonderen Satzes, eines Satzes von unabsehbarer Tragweite liegt, dringt dem „gewöhnlichen" Denken kaum ins Bewußtsein. Der Satz der Nr. 55 ist wieder einer der „selbstverständlichen" Sätze, deren Wichtigkeit erst zutage tritt, wenn man daran geht, die alltäglichen Schlußweisen zu restlos stichhaltigen zu erheben. Vgl. § 4 Nr. 13 und § 5 Nr. 16.

57. Den in § 12 für die einfachsten Fälle eingeführten Begriff „konform" darf ich jetzt auf beliebige Rotten ausdehnen. Ist jede Nachbarrotte aus einer Rotte $\mathfrak{S}$ konform mit einer Nachbarrotte aus der Rotte $\mathfrak{A}$, so nenne ich $\mathfrak{S}$ *konform mit* $\mathfrak{A}$. Diese Beziehung ist gegenseitig. Jede Rotte ist sich selbst konform. Rotten, die mit einer Rotte konform sind, sind unter sich konform.

Hiernach sind die Rotten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ in Nr. 55 konform. Also: Nach jeder Rotte kann ich eine konforme Rotte bilden.

58. In § 12 Nr. 48 hätte ich auf γ irgendein Geschehniß ε folgen lassen dürfen, auf ε erst eine neue Angabe α' von α, und dann wieder alles wie a. a. O. Dieses Verfahren kann ich auf beliebige Rotten ausdehnen. Also: Folgt auf $\mathfrak{A}$ ein Geschehnis ε, so ist auch nach ε eine mit $\mathfrak{A}$ konforme Rotte möglich.

Auch die Betrachtung in § 12 Nr. 51 kann ich auf beliebige Rotten ausdehnen: Nach jeder Rotte kann ich aus denselben Dingen sowohl konforme als auch nicht konforme Rotten bilden.

Schließlich: Folgt auf $\mathfrak{A}$ ein Geschehniß ε, so sind auch nach ε sowohl mit $\mathfrak{A}$ konforme, als auch mit $\mathfrak{A}$ nicht konforme Rotten aus den Gliedern von $\mathfrak{A}$ möglich.

§ 14.

Anwendung auf Sammelnamen.

59. Wenn ich auf ein Blatt verschiedene Wörter schreibe, so werden diese Wörter dadurch „angegebene Dinge", und ich kann ihnen einen

Sammelnamen erteilen (§ 2 Nr. 6). Das geschieht schon, wenn ich vo ihnen als den „auf dem Blatt stehenden Wörtern" spreche. Überdies hab ich dadurch, daß ich sie auf das Blatt schrieb, aus ihnen eine „Rotte" gebildet.

Wenn ich nun irgend einem Wort begegne, so kann ich fragen, ob das Wort eines von denen ist, die auf dem Blatt stehen. Um dies z ermitteln, werde ich die erwähnte Rotte „abschreiten" und bei jeden Glied feststellen, ob es das gesuchte Wort ist oder nicht. Ich tue da in der Überzeugung, daß ich nach dem Abschreiten das Urteil darübe besitzen werde, ob das Wort auf dem Blatt vorkommt oder nicht.

60. Um diesen Vorgang in seiner allgemeinen Bedeutung darzustellen wende ich mich wieder zur Rotte $\mathfrak{A}$ der Dinge A aus den §§ 11 und 1 und führe außerdem ein Ding k ein. Dann entsteht die Frage, ob da Ding k unter den Sammelnamen A fällt oder nicht; siehe z. B. § 9 Nr. 31

Weitergehend: Außer der Rotte $\mathfrak{A}$ der Dinge A sei eine Rotte der Dinge F eingeführt; dann entsteht die Frage, ob unter den Sammel namen A auch ein Ding F fällt oder nicht, und im Fall der Bejahung ob nur ein einziges F und welches, oder mehrere F und welche. Sieh z. B. § 9 Nr. 20.

Die Behandlung der weitergehenden Frage setzt die der engere voraus. Die der engeren setzt voraus, daß mir immer, wenn Eigenname k und k' vorliegen, bekannt ist, ob diese Eigennamen dasselbe Ding be deuten oder nicht; nach § 1 Nr. 3 in Verbindung mit Nr. 1 ist dies Voraussetzung erfüllt.

Der „Besitzer" des Namens k (§ 1 Nr. 2) gilt als festgelegt in Ab satz 1. Vom Namen r dagegen, den ich außerdem einführe, soll nur fest gehalten werden, daß r Eigenname eines Dinges ist, ohne daß ich ei „Ding des Namens r" schon von vornherein bestimme.

61. Für jede *besondere* Bestimmung kann ich beurteilen, ob de Name r gleichbedeutend ist mit dem Namen k; das Urteil hierüber be zeichne ich mit U_r. Um eine solche Bezeichnung in einem besondere Fall benutzen zu können, muß ich an die Stelle von r den Eigenname des besonderen Dinges eintragen. So komme ich zu *bestimmten* Urteile z. B. U_r, U_f, wenn — ähnlich wie in § 7 Nr. 23 — e irgend ein Glie der Rotte $\mathfrak{A}$, nicht das letzte, und f das nächstfolgende bedeutet.

Ich gebe nun nach $\mathfrak{A}$ das in $\mathfrak{A}$ erste Glied a nochmals an und lass das Urteil U_a folgen, dann das in $\mathfrak{A}$ nächstfolgende Glied zu a; auf jed nochmals angegebene Glied e von $\mathfrak{A}$ lasse ich U_e folgen und gehe dan zu f und U_f über. Dadurch erhalte ich alle Glieder von $\mathfrak{A}$ und das U teil über jedes. Am Ende dieses Hergangs oder schon während desselbe erfahre ich, ob das Ding k zu den Dingen A gehört oder nicht. Die En

scheidbarkeit der Frage, ob das Ding k unter den Sammelnamen A fällt oder nicht, beruht also auf dem Satz:

Wenn ich eine Rotte der Dinge A abschreite und für jedes dabei angegebene Glied beurteile, ob es von k verschieden ist oder nicht, so erhalte ich die Urteile über alle Glieder der Rotte und damit das Urteil darüber, ob k zu den Dingen A gehört oder nicht.

62. Welches Ding Besitzer des Eigennamens r sein soll, wurde nicht von vornherein bestimmt (Nr. 60). Für jede besondere Bestimmung verstehe ich jetzt zu beurteilen, ob das Ding des Namens r zu den Dingen A gehört oder nicht (Nr. 61); das Urteil hierüber bezeichne ich mit V_r.

Nunmehr wende ich mich zu der Frage, die in Nr. 60 die weitergehende war. Der Gedankengang der Nr. 61 läßt sich auf die Rotte $\mathfrak{F}$ der Dinge F und das Urteil V_r übertragen und führt zu dem Satz:

Wenn ich eine Rotte der Dinge F abschreite und für jedes dabei angegebene Glied beurteile, ob es zu den Dingen A gehört oder nicht, so erhalte ich die Urteile über alle Glieder und damit das Urteil darüber, ob unter den Sammelnamen A auch ein Ding F fällt oder nicht, und im Fall der Bejahung, ob nur ein einziges F und welches, ob mehrere F und welche.

Mittels dieses Satzes ist auch entscheidbar, ob alle F Dinge A sind, ob alle A Dinge F sind, ob die Sammelnamen A und F gleichbedeutend sind.

63. Auch die Sätze in Nr. 61 und 62 gehören zu den allerwesentlichsten Voraussetzungen, auf die sich das Denken zu stützen gewohnt ist. Gerade deshalb werden sie dem „gewöhnlichen" Denken kaum als besondere Sätze bewußt. Sie dürften für „selbstverständliche" ausgegeben und als solche ohne weiteres den früheren angereiht werden. Das braucht jedoch nicht zu geschehen. Im Besitz des in § 13 Nr. 55 aufgestellten Satzes kann vielmehr der Satz der Nr. 61 und dann auch der der Nr. 62 als Folgerung dargestellt werden.

§ 15.

Beweis durch Abschreiten.

64. Wie im vorstehenden bezeichne ich wieder mit $\mathfrak{A}$ eine Rotte, für deren Glieder der Sammelname A gilt, mit e irgend ein Glied, nicht das letzte, mit f das nächstfolgende. Die Rotte ist eine Kette von Angaben, also von Geschehnissen; ich will jetzt ein der Kette nicht angehöriges Geschehnis Γ einführen. Wenn ich noch den Namen r einführe, wie in § 14, jedoch jetzt mit der Maßgabe, daß der Besitzer des Namens r jedenfalls ein Ding A sein soll, so entsteht die Frage, ob die in $\mathfrak{A}$ auftretende Angabe von r ein späteres Geschehnis als Γ ist oder nicht. Ist

sie ein späteres, so will ich diese Aussage über das Ding r mit H_r be zeichnen.

Auf Grund von § 4 Nr. 11 kann ich nun behaupten: Wenn die An gabe von e in $\mathfrak{A}$ später ist als Γ, so ist die Angabe von f in $\mathfrak{A}$ ebenfall später als Γ. M. a. W.: Gilt die Aussage H_e, so gilt auch die Aussage H_f Wenn ich also die Rotte $\mathfrak{A}$ abschreite und ein Glied treffe, für das di Aussage H_r gilt, so gilt sie auch für das nächstfolgende Glied.

65. Es sei jetzt K_r irgend eine Aussage der eben geschilderten Art so daß ich behaupten darf: Gilt die Aussage K_e, so gilt auch die Aus sage K_f. Dann wird — immer für den Fall, daß K_r für ein Glied von $\mathfrak{A}$ das nicht letztes ist, gilt — die Aussage K_r sich in $\mathfrak{A}$ auf das nächst folgende Glied übertragen, von da auf das dann nächstfolgende, und ma mag geneigt sein, ohne weiteres anzunehmen, daß man so bis zum letzte Glied gelangt. Bei näherem Zusehen liegt hierin wieder eine neue Ei scheinung von grundlegender Bedeutung, eine Erscheinung jedoch, die ic nicht als selbständige neue hinzustellen brauche, sondern aus dem frühere ableiten kann.

Besonders wichtig ist der Fall, wo K_r schon für das erste Glied von $\mathfrak{A}$ gilt. Während des Abschreitens von $\mathfrak{A}$ darf ich dann bei der An gabe von a die Gültigkeit von K_r für a aussprechen, die Gültigkeit dar auf das zu a nächstfolgende Glied übertragen und dies fortsetzen. Wege dieser Möglichkeit will ich die in Absatz 1 eingeführte Aussage K_r, ma sie für a gelten oder nicht, eine *in der Rotte* $\mathfrak{A}$ *abschreitbare Aussa* nennen.

66. Die Aussage H_r in Nr. 64 ist demnach eine in $\mathfrak{A}$ abschreitbar Für sie würde das in Nr. 65 Angedeutete sich tatsächlich aus früher Sätzen ergeben, nämlich daß die Gültigkeit von H_r, wenn sie bei eine gewissen Glied von $\mathfrak{A}$ beginnt, sich von da bis zum letzten Glied au dehnen ließe; denn wenn die Angabe von e in $\mathfrak{A}$ später ist als Γ, so si die Angaben *aller* auf e folgenden Glieder ebenfalls später als Γ. U wenn die Gültigkeit von H_r schon für a zutreffen sollte, so würde überhaupt für jedes Glied von $\mathfrak{A}$ zutreffen.

Was so an der Aussage H_r beobachtet wird, läßt sich zu einer al gemeinen Erscheinung erheben:

Gilt eine Aussage K_r für das erste Glied a einer Rotte $\mathfrak{A}$, und die Aussage abschreitbar in $\mathfrak{A}$, so gilt sie für jedes Glied der Rotte.

67. Um diesen Satz aus früherem abzuleiten (siehe Nr. 65), verfah ich folgendermaßen: Nach a kann ich a angeben und die Aussage K_a eine gültige hinstellen. Von da gehe ich zu dem in $\mathfrak{A}$ auf a unmittelb folgenden Glied b über und folgere K_b. Nun kann ich jedesmal, we ich für ein Glied e die Folgerung K_e erlangt habe, zu f übergehen u

K_f folgern. Hierbei wird aber nach § 13 Nr. 55 die Rotte $\mathfrak{A}$ abgeschritten und also jedes Glied von $\mathfrak{A}$ angegeben; hinter jedem erscheint die darauf bezügliche Folgerung K_r.

Wird eine Aussage mittels des Satzes der Nr. 66 bewiesen, so will ich den Beweis einen *Beweis durch Abschreiten* nennen. Die gebräuchliche Bezeichnung ist: Beweis durch vollständige Induktion; doch hat dabei das Wort „Induktion" nicht die sonst übliche Bedeutung, die einen Gegensatz zur „Deduktion" ausdrückt.

§ 16.

Sammlung von Dingen.

68. Ich gehe wieder, wie bei früheren Gelegenheiten, von der Annahme aus, daß Dinge a, b, c angegeben sind, durch Angaben α, β, γ, stelle mir aber jetzt zunächst vor, daß es greifbare Dinge sind, die ich in einen Behälter bringen kann. Die Dinge a, b, c werden dadurch, daß sie — und nur sie — in dem Behälter aufbewahrt werden, zu einer „*Sammlung*"[2]) vereinigt.

Die Kette der Angaben α, β, γ ist eine Rotte $\mathfrak{C}$ der Dinge a, b, c. Ich kann aber nach Belieben weitere Rotten dieser Dinge bilden, sowohl mit $\mathfrak{C}$ konforme als auch nicht konforme (§ 12 Nr. 51). Jede solche Rotte führt zu derselben „Sammlung"; die Sammlung ist durch jede einzelne dieser Rotten bestimmt. Ich kann ihr einen Eigennamen G erteilen.

69. Einen Sammelnamen kann ich nur für „angegebene" Dinge einführen (§ 2 Nr. 6). Ebenso wird der Begriff einer „Sammlung" erst gewonnen, nachdem Dinge einzeln angegeben, also in eine „Rotte" gebracht sind. Zwar kommt es vor, daß mir etwas ursprünglich als ein „Ganzes" erscheint und sich erst hinterher in einzelne Dinge zerlegt. Aber erst wenn ich diese einzelnen Dinge — hier a, b, c — erkannt habe, erwerbe ich den deutlichen Begriff des Dinges G, das die „Sammlung der Dinge a, b, c" ist. Vgl. § 10 Nr. 39, § 11 Nr. 44.

Das Ding G ist von den Dingen a, b, c verschieden. Dies liegt schon darin, daß G erst angegeben werden kann, wenn Angaben der Dinge a, b, c vorliegen.

70. In Nr. 68 stellte ich mir vor, daß die Dinge a, b, c in einen Behälter gelegt waren. Ich kann sie nun einzeln herausnehmen und sie dadurch in eine von $\mathfrak{C}$ verschiedene Rotte bringen; indem ich sie einzeln wieder zurücklege, bringe ich sie abermals in eine neue Rotte. Ging in $\mathfrak{C}$

---

[2]) In den Grundlagen der Analysis habe ich in den §§ 9 und 33 den Begriff „Menge" definiert. Für die Menge im Sinn des dortigen § 9, d. i. die Menge von angegebenen Dingen, benutze ich jetzt das Wort „Sammlung".

etwa a vor b voran, so kann ich dies in einer neuen Rotte ändern; abe das Ding G, die Sammlung, wird dadurch kein anderes.

Wenn ich von den Dingen a, b, c sagte, daß sie (und nur sie) i der Rotte $\mathfrak{C}$ enthalten sind, so sage ich jetzt außerdem: a, b, c (un nur sie) sind in der Sammlung G enthalten. Wenn ich aber daraufhin daß a und b in einer gewissen Rotte enthalten sind, sagen durfte: a is in der Rotte früher als b, oder: a ist in der Rotte später als b, so kan ich darauf, daß a und b in der Sammlung G enthalten sind, entsprechend Aussagen nicht gründen.

Hierin liegt schon, daß die Sammlung G keine Rotte der a, b, c ist Die Sammlung ist überhaupt keine Kette, auch kein Geschehnis. Sieh unten § 18 Nr. 77.

71. Unter den hier betrachteten einfachen Fall kann ich, wie i § 6 Nr. 22, noch hinuntergehen und mich auf Dinge a, b beschränke die zunächst wieder greifbare Dinge sein sollen. Ich kann dann von de „Sammlung der Dinge a und b" sprechen. Eine solche Sammlung heiß ein *Paar*. Die Sammlung der Dinge a und b heißt: Das Paar aus a und (oder: Das Paar aus b und a; vgl. § 6, Nr. 18 Abs. 4).

Um von diesen einfachsten Fällen zu beliebigen aufsteigen zu könne gebe ich vor allem die Voraussetzung greifbarer Dinge auf. Es sei als wieder $\mathfrak{A}$ irgend eine Rotte, A der Sammelname für ihre Glieder. Dan führe ich als „*Sammlung der Dinge* A" ein Ding M durch folgende Be stimmung ein:

Von den Dingen A, die in der Rotte $\mathfrak{A}$ enthalten sind, wird auc gesagt, daß sie „in dem Ding M enthalten" sind, und zwar mit der Maß gabe, daß vom „Ding M" *zunächst* in keinem andern Zusammenhan gesprochen werden darf.

Hierdurch wird nicht ausgeschlossen, daß das Ding M *späterhin* noc in andern Zusammenhang gebracht werden darf. Jedoch muß dann vo her eine besondere Unterlage dafür geschaffen werden. Siehe unten § 1

§ 17.

Implizite Definition[3]).

72. Als in § 11 Nr. 41 der Name „die Rotte $\mathfrak{A}$ der Dinge A" de niert wurde, besaß das Ding, dem dieser Name zukommen sollte, berei einen Namen: die Kette $\mathfrak{A}$ der Geschehnisse A, die Angaben von laut verschiedenen Dingen, den Dingen A, waren. Durch die Definition ist n erreicht worden, daß die Kette der erwähnten besonderen Art einen besondere Namen besitzt und sich dadurch deutlich von den Ketten anderer Art abheb

[3]) Siehe hierzu und zu § 18: Annalen der Philosophie, 2, Heft 2, 1920. S. 145

Anders lag die Sache, als in § 10 Nr. 35 der Name „die Kette der Geschehnisse A“ eingeführt wurde. Für das Ding, dem dieser Name zukommen sollte, war noch kein Name vorhanden; die Einführung des Namens war der unmittelbare Abschluß eines inneren Hergangs, der das Ding erzeugt. Der Name „Kette“ wurde demnach nicht definiert; der Begriff der Kette wurde als ein ursprünglicher Begriff, als ein *Kernbegriff* eingeführt.

73. Die „Sammlung M der Dinge A“ in § 16 Nr. 71 habe ich nicht als Kernbegriff eingeführt, sondern durch Vermittlung anderer Begriffe, jedoch nicht in der Weise, wie den Begriff der Rotte gemäß Nr. 72. Die darüber, wie der Eigenname M angewendet werden soll, getroffene Bestimmung dient als Definition; sie bezieht sich aber nicht auf ein Ding, das ich auch ohne die Definition — obwohl dann weniger zweckmäßig — benennen kann. Vielmehr sagt die Definition bloß, in welchen Aussagen vom „Ding M“ gesprochen werden darf, und was solche Aussagen bedeuten. Wenn nämlich r irgendein Ding ist, so darf ich sagen: Das Ding r ist in dem Ding M enthalten oder nicht enthalten, und das bedeutet: Das Ding r ist ein Ding A oder nicht ein Ding A.

Eine Definition, wie hier die eines Eigennamens M, will mir nur die Berechtigung schaffen, mich so auszudrücken, *als wäre M Eigenname eines Dinges*, sagt mir aber sonst nichts über ein „Ding M“. Ich habe derartige Definitionen *implizite Definitionen* genannt.

74. Die Definition von M kommt darauf hinaus, daß die Bezeichnung „Ding mit dem Sammelnamen A“ sich decken soll mit der Bezeichnung „in M enthaltenes Ding“. In andere Zusammenhänge, als die durch die Bezeichnung „in M enthaltenes Ding“ begründeten, soll M nicht eingehen. Es entsteht daher keine Gefahr für die Richtigkeit von Schlußfolgerungen. Ich kann jederzeit M wieder abwerfen. Die Benutzung des Namens M geschieht allemal nur mittels der Sätze:

Ist r ein Ding A, so ist r im Ding M enthalten. Ist r im Ding M enthalten, so ist r ein Ding A.

Im Gegensatz zu den impliziten Definitionen nenne ich die von der gewöhnlichen Art *explizite Definitionen*. Eine solche ist etwa die folgende: Den Dingen, die unter den Sammelnamen D fallen und überdies die Eigenschaft E haben, wird der Sammelname K erteilt; wobei vorausgesetzt wird, daß die Definition sinnvoll ist. Auch die explizite Definition wird durch Sätze vertreten, die vorliegende Definition des Sammelnamens K durch folgende Sätze:

Wenn r ein Ding D ist und die Eigenschaft E hat, so ist r ein Ding K. Ist r ein Ding K, so ist r ein Ding D und hat die Eigenschaft E.

§ 18.

Wirkungen der impliziten Definition.

75. Die Definition von M in § 16 Nr. 71 berechtigte *zunächst* nur in gewissem Zusammenhang, vom „Ding M“ zu sprechen. Diese Berechtigung läßt sich aber erweitern.

Vor allem darf ich gestatten, daß dem „Ding M“ noch andere Eigennamen erteilt werden, z. B. M'. Dies kommt nur darauf hinaus, daß die Bezeichnung „in M enthaltenes Ding“ sich decken soll mit der Bezeichnung „in M' enthaltenes Ding“.

Ich darf überdies einen Eigennamen N dadurch definieren, daß „Ding mit dem Sammelnamen A“ sich decken soll mit „in N enthaltenes Ding“. Dann deckt sich „in M enthalten“ mit „in N enthalten“; ich darf daher die Namen M und N *wie Eigennamen eines und desselben Dinges* behandeln. Folglich darf ich sagen, daß durch die Definition in § 16 Nr. 71 nur „ein einziges Ding“ eingeführt wird. Ich nenne dieses *die Sammlung der Dinge A*; die Dinge A, die in M enthaltenen Dinge, nenne ich *die Stücke der Sammlung*.

76. Sodann darf ich, an § 2 Nr. 4 und 5 anknüpfend, vom „Angeben“ auch auf Grund der impliziten Definition sprechen, nämlich vom Angeben des „Dinges M“ mittels eines Eigennamens. Die Angabe ist nach wie vor ein Geschehnis.

Daran schließt sich die Übertragung dessen, was in § 2 Nr. 6 und 7 über Sammelnamen gesagt ist. Die §§ 3 bis 8 handeln nur von Geschehnissen und werden daher von der Neuerung nicht betroffen, ausgenommen die Behauptung in § 3 Nr. 10, die ich jetzt folgendermaßen fasse: Nach irgend welchen Angaben irgend welcher Dinge C werde ich imstande sein *ohne implizite Definition* ein Ding anzugeben, das nicht unter den Sammelnamen C fällt. Derselbe Zusatz ist in § 9 Nr. 31 Abs. 2, Nr. 34 Abs. 2 anzubringen.

77. Eine Aussage, wonach das Ding M früher oder später ist als ein gewisses Geschehnis, wird durch die Definition von M ausgeschlossen. Auch bietet sich keine geeignete Handhabe, eine solche Möglichkeit zu schaffen. Ich kann die „Sammlung“ nicht zu den „Geschehnissen“ rechnen.

Dasselbe gilt von einer etwaigen Aussage, durch die Geschehnisse als „im Ding M benachbart“ hingestellt würden. Ich kann die „Sammlung“ nicht zu den „Ketten“ rechnen, mithin auch nicht zu den „Rotten“.

Im übrigen ist zu den §§ 10 bis 15 nichts zu bemerken. Nur ist in § 14 Nr. 60 Abs. 3 jetzt auch auf Nr. 75 zu verweisen.

78. Ist M die „Sammlung“ der Dinge A, so sind (Nr. 75) die A die „Stücke“ der Sammlung M, und umgekehrt. Die Möglichkeit eines

Aussage, wonach das Ding M selbst ein „Stück des Dinges M“, also M selbst „in M enthalten“ wäre, war durch die Definition von M nicht gegeben. Eine solche Möglichkeit kann auch nicht geschaffen werden. Denn die Definition setzt voraus, daß die Dinge A angegeben sind; folglich kann ich das Ding M erst angeben, wenn jedes A angegeben ist; das Ding M ist demnach von jedem A verschieden (vgl. § 16 Nr. 69). *Die Sammlung ist nicht Stück von sich selbst*, M ist nicht in M enthalten.

§ 19.

Anwendungen des Beweises durch Abschreiten[4]).

79. Auf GA § 3 und 4 gestützt, kann ich hier folgende Ausdrücke anwenden: Die Glieder der Rotte $\mathfrak{A}$ *von a an*, die Glieder *bis b*, die Glieder *von a bis b*; sodann: Der *Abschnitt* aus $\mathfrak{A}$ von a an, wenn a nicht das letzte Glied ist; der Abschnitt bis b, wenn b nicht das erste Glied ist; der Abschnitt von a bis b, wenn a vor b steht.

Der Abschnitt aus der Rotte $\mathfrak{A}$ bis zum Glied r werde mit S_r bezeichnet; r ist nicht das erste Glied. Weiter sei e ein inneres Glied von $\mathfrak{A}$, f das nächstfolgende. Dann läßt die Aussage H_r aus § 15 Nr. 64 sich jetzt als eine Aussage über den Abschnitt S_r fassen, nämlich in der Form: Die letzte Angabe im Abschnitt S_r ist ein späteres Geschehnis als Γ; und von dieser Aussage darf ich jetzt behaupten: wenn sie für den Abschnitt S_e gilt, so gilt sie auch für den Abschnitt S_f. Eine solche Aussage nenne ich eine *in der Rotte $\mathfrak{A}$ abschreitbare Aussage über den Abschnitt S_r* und erhalte den Satz (GA § 4, Lehrs. 26):

Es sei $\mathfrak{A}$ irgend eine Rotte, aber nicht Paarrotte, m das nächstfolgende Glied nach dem ersten. Gilt dann eine auf den Abschnitt S_r bezügliche Aussage für S_m, und ist die Aussage in $\mathfrak{A}$ abschreitbar, so gilt sie für $\mathfrak{A}$ selbst.

80. Es sei $\mathfrak{M}$ eine mit l beginnende und mit m endende Paarrotte, $\mathfrak{N}$ eine mit l beginnende, mit n endende und außerdem nur m enthaltende Rotte. Nach $\mathfrak{M}$ kann ich m nochmals angeben und von m zu l übergehen. Nach $\mathfrak{N}$ kann ich n nochmals angeben, dann von n zu m und von m zu l übergehen. In beiden Fällen kann ich sagen: Ich gebe das letzte Glied der Rotte nochmals an und gehe von jedem nochmals angegebenen Glied, das nicht erstes ist, zum nächstvorhergehenden über. Wo dies geschieht, sage ich: die Rotte wird *rückwärts abgeschritten*.

Für die Rotten der einfachsten Art ist das rückwärts Abschreiten allemal möglich, und zwar führt es zu allen Gliedern der ursprünglichen

[4]) Im folgenden beziehe ich mich der Kürze wegen mehrfach auf die näheren Ausführungen in dem Buche: Grundlagen der Analysis, 1909, das ich mit GA bezeichne.

Rotte, indem es diese Glieder zu einer neuen Rotte verbindet. In de neuen Rotte ist jede Nachbarrotte eine Umkehrung einer aus der ursprüng lichen Rotte entnommenen Nachbarrotte.

81. Ähnlich wie in § 14 Nr. 60 führe ich einen Namen r ein, de Eigenname einer Rotte sein soll, ohne daß von vornherein bestimmt ist welche Rotte der Besitzer des Namens r sein soll. Durch *Anfügen* eine Gliedes an die Rotte r (GA § 4, Def. 13) entstehe die Rotte s. Ha sich nun gezeigt, daß die Rotte r rückwärts abgeschritten werden kann so will ich diese Aussage über die Rotte r mit T_r bezeichnen. Es ergibt sich dann der Satz: Gilt die Aussage T_r, so gilt auch die Aussage T_s.

Eine Aussage, für die dieser Satz gilt, heiße eine *abschreitbare Aussage über die Rotte* r. Mittels des „Beweises durch Abschreiten" erhalte ich den Satz (GA § 4, Lehrs. 27):

Ist eine Aussage über Rotten, die für jede Paarrotte gilt, abschreitbar so gilt sie für jede Rotte.

82. Mit ϱ werde eine Sammlung bezeichnet, mit r eine Rotte aus den Stücken der Sammlung. Durch *Hinzufügen* eines Stückes zur Samm lung ϱ (GA § 9, Def. 25) entstehe die Sammlung σ. Die Aussage T_r wird dann bedeuten: Aus den Stücken von ϱ kann ich eine rückwärts abschreitbare Rotte bilden. Dies ist eine Aussage über ϱ; bezeichne ich sie mit U_ϱ, so ergibt sich der Satz: Gilt die Aussage U_ϱ, so gilt auch die Aussage U_σ.

Eine Aussage, für die dieser Satz gilt, heiße eine *abschreitbare Aussage über die Sammlung* ϱ.

Da ϱ die Sammlung der Glieder von r ist, so ist jede Aussage über ϱ eine Aussage über r. Ist die Aussage V_ϱ abschreitbar, zieht sie also V_σ nach sich, so ist sie auch als Aussage über r abschreitbar. Der Satz am Ende von Nr. 81 liefert mithin den folgenden Satz (GA § 9, Lehrs. 72):

Ist eine Aussage über Sammlungen, die für jedes Paar gilt, abschreitbar so gilt sie für jede Sammlung.

§ 20.

Abschreiten rückwärts.

83. Nach § 19 Nr. 80 kann ich jede Paarrotte rückwärts abschreiten. Die in § 19 Nr. 81 mit T_r bezeichnete Aussage gilt daher für jede Paarrotte und ist überdies abschreitbar; nach dem Satz am Ende von § 19 Nr. 81 gilt sie folglich für jede Rotte, d. h. (GA § 13, Lehrs. 97):

Jede Rotte kann rückwärts abgeschritten werden; und zwar (siehe § 19 Nr. 80) führt dies zu allen Gliedern der ursprünglichen Rotte, nämlich zu einer Rotte, in der jede Nachbarrotte eine Umkehrung aus einer der ursprünglichen Nachbarrotten ist.

In Erweiterung der in § 12 Nr. 47 getroffenen Bestimmung nenne ich die neue und jede mit ihr konforme Rotte eine *Umkehrung* der vorigen.

84. Benutzt man die Bezeichnungen des § 15, so besteht der Satz: Gilt die Aussage K_e, so gilt auch die Aussage K_f. Ist also K_r' das Gegenteil der Aussage K_r, so besteht der Satz: Gilt die Aussage K_f', so gilt auch die Aussage K_e'. Hiernach greift, wenn K_r' für ein nicht erstes Glied von $\mathfrak{A}$ gilt, die Aussage K_r' auf das nächstvorhergehende Glied über; ich nenne sie eine *in der Rotte $\mathfrak{A}$ rückwärts abschreitbare Aussage*. Mit Hilfe von Nr. 83 beweist man nach dem Vorbild von § 15 Nr. 67 den Satz:

Gilt eine Aussage für das letzte Glied einer Rotte $\mathfrak{A}$, und ist die Aussage in $\mathfrak{A}$ rückwärts abschreitbar, so gilt sie für jedes Glied von $\mathfrak{A}$.

II. Übersicht über die bisherigen Ergebnisse.

Zu § 1.

Kernbegriffe. Ding, Eigenname, einen Eigennamen erteilen.

Kernsätze. Ich kann einem beliebigen Ding einen Eigennamen erteilen. Einem andern Ding kann ich nicht denselben Eigennamen erteilen. Der Eigenname eines Dinges ist selbst ein Ding, und zwar ein anderes Ding.

Definition. Das Ding, dem ein Eigenname erteilt ist, heißt die Bedeutung (der Besitzer) des Namens.

Kernsatz. Einem Ding, dem ein Eigenname erteilt ist, kann noch ein anderer Eigenname erteilt werden. Dies kann für dasselbe Ding beliebig wiederholt werden.

Definition. Eigennamen, die einem und demselben Ding erteilt sind, heißen gleichbedeutend.

Lehrsatz. Sind die Eigennamen $\varkappa$ und λ gleichbedeutend, ebenso die Eigennamen λ und μ, so sind auch die Eigennamen $\varkappa$ und μ gleichbedeutend.

Zu § 2.

Kernbegriffe. Ein Ding angeben; Geschehnis; Sammelname, einen Sammelnamen erteilen.

Kernsätze. Ich kann ein beliebiges Ding angeben. Die Angabe kann mittels eines dem Ding erteilten Eigennamens geschehen. Ein anderes Ding kann ich nicht durch dieselbe Angabe angeben. Die Angabe eines Dinges ist selbst ein Ding, und zwar ein von dem Ding und seinen Eigennamen verschiedenes Ding. Die Angabe ist ein Geschehnis, jede Angabe ein Geschehnis für sich.

Definition. Das angegebene Ding heißt der Gegenstand der Angabe.

Kernsätze. Habe ich ein Ding angegeben, so kann ich dasselbe Ding abermals angeben. Dies kann für dasselbe Ding beliebig wiederholt

werden. Dingen, die ich angegeben habe, kann ich einen Sammelnamen erteilen. Der Sammelname ist selbst ein Ding, und zwar ein von jenen Dingen verschiedenes.

Definition. Die Dinge, denen ein Sammelname erteilt ist, heißen die Bedeutungen (die Träger) des Namens.

Kernsatz. Habe ich für irgend welche Dinge einen Sammelnamen eingeführt, so kann ich für dieselben Dinge noch einen anderen Sammelnamen einführen. Dies kann für dieselben Dinge beliebig wiederholt werden.

Definition. Sammelnamen, die denselben Dingen erteilt sind, heißen gleichbedeutend.

Lehrsatz. Sind die Sammelnamen D und E gleichbedeutend, ebenso die Sammelnamen E und F, so sind auch die Sammelnamen D und F gleichbedeutend.

Zu § 3.

Kernbegriffe. Früher, später.

Kernsätze. Ist a ein Geschehnis, b ein anderes, so ist entweder a früher als b oder b früher als a. Ist a früher als b, so ist b nicht früher als a. Ist a früher als b, so ist b später als a. Ist b später als a, so ist a früher als b.

Definitionen. Ist a früher als b, so sagt man auch: a ist vor b geschehen, a liegt vor b, a geht b voran, b ist nach a geschehen, b liegt nach a, b folgt auf a.

Kernsätze. Nach jedem Geschehnis kann ich ein Ding angeben, das noch nicht angegeben war. Nach irgend welchen Angaben A irgend welcher Dinge kann ich ein Ding angeben, das nicht Gegenstand einer Angabe A war.

Zu § 4.

Kernsätze. Ist a ein Geschehnis, b ein auf a folgendes, so ist b später als jedes vor a liegende Geschehnis. Wenn Geschehnisse A angegeben sind, so kann ich unter den A eines angeben, das früher als jedes andere A ist, ebenso eines, das später als jedes andere A ist.

Definitionen. Jenes A heißt frühestes oder erstes, dieses heißt spätestes oder letztes.

Zu § 5.

Lehrsätze. Nur eines der A ist erstes, nur eines ist letztes. Erstes und letztes der A sind verschieden. — Folgt auf ein A nur ein einziges A, so ist dieses das letzte. Geht einem A nur ein einziges A voran, so ist dieses das erste.

Zu § 6.

Lehrsatz. Sind a, b, c Geschehnisse, a früher als b, b früher als c, so ist a früher als c.

Definition. Liegt das Geschehnis b so, daß es dem einen der Geschehnisse a und c nachfolgt und dem anderen vorangeht, so sagt man: b liegt zwischen a und c.

Lehrsatz. Sind a, b, c verschiedene Geschehnisse, so liegt eines von ihnen zwischen den anderen. Liegt etwa b zwischen a und c, so liegt a nicht zwischen b und c, c nicht zwischen a und b.

Zu § 7.

Lehrsatz. Sind Geschehnisse A angegeben, darunter a, b, c, und liegt etwa b zwischen a und c, so ist b weder das erste noch das letzte A.

Kernbegriff. Unmittelbar folgen.

Kernsätze. Ist e irgend eines der Geschehnisse A, aber nicht das letzte, so kann ich ein und nur ein A angeben, das auf e unter den A unmittelbar folgt. Ist g ein auf e folgendes A, h ein auf g folgendes, so folgt h nicht unmittelbar auf e.

Lehrsätze. Folgt auf e nur ein einziges A, so ist dieses das auf e unmittelbar folgende und zugleich das letzte A. Ist h ein auf e folgendes A, und liegt ein A zwischen e und h, so ist h nicht das auf e unmittelbar folgende A; oder: Zwischen e und dem darauf unmittelbar folgenden A liegt kein A.

Lehrsätze. Ist f das auf e unmittelbar folgende A, h ein anderes auf e folgendes A, so liegt f vor h, f zwischen e und h. Ist f zugleich das letzte A, so folgt auf e kein A außer f. Folgt unter den A auf e nicht f allein, so ist f unter den auf e folgenden A das erste.

Lehrsatz. Unter den A folgt eines und nur eines in der Weise auf e, daß zwischen ihm und e kein A liegt; dieses eine ist das auf e unmittelbar folgende A.

Definition. Das auf e unmittelbar folgende A heißt auch: Das erste A nach e, das nächstfolgende oder nächstspätere A nach oder zu e, das nächste A nach e.

Zu § 8.

Kernsatz. Sind Geschehnisse A angegeben, und ist q eines davon, aber nicht das erste, so kann ich ein A angeben, zu dem q das nächstfolgende ist.

Lehrsätze. Unter den A liegt eines und nur eines, etwa p, in der Weise vor q, daß zwischen p und q kein A liegt; q ist das nächste A nach p. Liegt vor q nur ein einziges A, so fällt p mit diesem zusammen. Liegt vor q unter den A nicht p allein, so ist p das letzte der vor q gelegenen A.

Definition. Das Geschehnis p heißt: das letzte A vor q, das vor

q unmittelbar vorhergehende A, das nächstvorhergehende oder nächstfrühere A vor oder zu q, das nächste A vor q.

Lehrsätze. Liegt vor q nur ein einziges A, so ist dieses das vor unmittelbar vorhergehende A; zugleich ist es das erste A. Ist das vor unmittelbar vorhergehende A zugleich das erste A, so ist es das einzig A vor q. Liegt vor q unter den A nicht p allein, sondern etwa noch p' so liegt p zwischen p' und q.

Zu § 9.

Kernsätze. Ist eine Angabe a eines Dinges α geschehen, so kann nach dem Geschehnis a eine neue Angabe des Dinges α geschehen. Ist nach a eine Angabe b geschehen, deren Gegenstand von α verschieden ist so kann auch nach b eine neue Angabe von α geschehen; oder: Sind a und b Angaben verschiedener Dinge, a früher als b, so ist für den Gegenstand der Angabe a eine weitere Angabe möglich, die später ist als b.

Lehrsätze. Sind die Dinge C die Gegenstände der Angaben A, und ist α eines der Dinge C, so kann ich nach den Geschehnissen A das Ding α abermals angeben. Nach den Angaben A der Dinge C kann ich Dinge angeben, von denen keines unter den Sammelnamen C fällt.

Zu § 10.

Kernbegriff. Kette von Geschehnissen[5]).

Kernsätze. Sind Geschehnisse A angegeben, so kann ein und nur ein Ding $\mathfrak{A}$ angegeben werden, das die Kette der A ist. $\mathfrak{A}$ ist nicht auch Kette anderer Geschehnisse.

Definitionen. Die A heißen die Bestandteile der Kette $\mathfrak{A}$. Ich sage auch: $\mathfrak{A}$ besteht aus den Geschehnissen A, die A gehören der Kette $\mathfrak{A}$ an.

Definition. Wenn α und β Geschehnisse A sind, jedoch kein zwischen α und β liegt, so heißen α und β in der Kette $\mathfrak{A}$ benachbart.

Lehrsätze. In der Kette $\mathfrak{A}$ folgt dann entweder β unmittelbar auf α, oder α unmittelbar auf β. Zu jedem A kann ich ein benachbartes angeben. Zum ersten und letzten A kann ich nur *ein* benachbartes angeben; zu jedem anderen A ist sowohl das nächstfrühere als das nächstspätere benachbart.

Kernsatz. Die Kette ist kein Geschehnis.

Lehrsatz. Die Kette $\mathfrak{A}$ ist ein von den A verschiedenes Ding.

Definition. Wenn ich von einem Geschehnis g sage, daß es später als $\mathfrak{A}$ ist, so heißt dies: g ist später als alle A.

Lehrsatz. Jede Angabe von $\mathfrak{A}$ ist später als $\mathfrak{A}$.

---

[5]) Mit diesem Kernbegriff ist die Sammlung der Kernbegriffe für das Gebiet der Arithmetik vollständig. Alle weiteren Begriffe der Arithmetik werden aus diesen abgeleitet.

Definition. Ist Π Sammelname für ein Geschehnis α' und außerdem ur noch für ein Geschehnis β', so nenne ich die Kette $\mathfrak{P}$ der Geschehnisse I eine Paarkette.

Lehrsätze. In $\mathfrak{P}$ ist entweder α' erster Bestandteil und β' letzter, der β' erster und α' letzter. In $\mathfrak{P}$ sind α' und β' benachbart.

Definition. Fallen die Geschehnisse Π unter den Sammelnamen A, o nenne ich die Kette $\mathfrak{P}$ der Π eine Paarkette aus $\mathfrak{A}$. Dies soll auch elten, wenn die Π die einzigen A sind.

Lehrsatz. $\mathfrak{P}$ ist dann und nur dann die einzige Paarkette aus $\mathfrak{A}$, enn die Π die einzigen A sind, wenn also $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{A}$ zusammenfällt.

Zu § 11.

Definition. Sind die Bestandteile A der Kette $\mathfrak{A}$ Angaben von urchweg verschiedenen Dingen, den Dingen A, so nenne ich $\mathfrak{A}$: eine otte der Dinge A, oder: die Rotte $\mathfrak{A}$ der Dinge A; die A nenne ich: ie Glieder der Rotte $\mathfrak{A}$.

Definitionen. Statt: Das Ding a ist ein Glied von $\mathfrak{A}$, sage ich uch: Die Rotte $\mathfrak{A}$ enthält das Ding a, a ist in $\mathfrak{A}$ enthalten, a kommt n $\mathfrak{A}$ vor. Statt: a kommt in $\mathfrak{A}$ nicht vor, sagt man auch: a fehlt in $\mathfrak{A}$.

Definitionen. Sind a und b Glieder der Rotte $\mathfrak{A}$, und ist die ngabe von a die frühere, so sage ich: a ist in $\mathfrak{A}$ vor b angegeben, a eht in $\mathfrak{A}$ vor b voran, a steht in $\mathfrak{A}$ vor b, u. dgl. In derselben Weise bertrage ich auf die Glieder der Rotte die Begriffe: erstes, letztes, zwischen, ächstfolgend, nächstvorhergehend, benachbart.

Definitionen. Das erste Glied heißt auch Anfangsglied, das letzte ndglied. Anfangs- und Endglied nenne ich äußere Glieder, jedes andere lied ein inneres.

Lehrsätze. Jeder Angabe von $\mathfrak{A}$ müssen Angaben aller Glieder von vorangegangen sein. Die Rotte $\mathfrak{A}$ ist ein von den Dingen A verschiedenes ing, sie enthält nicht sich selbst.

Lehrsatz. Ist $\mathfrak{P}$ eine Paarkette aus Angaben α' und β', und ist a' er Gegenstand von α', b' der von β', a' von b' verschieden, so ist $\mathfrak{P}$ ine Rotte.

Definitionen. Ich nenne $\mathfrak{P}$ eine Paarrotte. Ist $\mathfrak{P}$ eine Paarkette us $\mathfrak{A}$, so nenne ich sie eine Paarrotte aus $\mathfrak{A}$. Sind a' und b' in $\mathfrak{A}$ enachbart, so nenne ich $\mathfrak{P}$ eine Nachbarrotte aus $\mathfrak{A}$.

Lehrsätze. In der Paarrotte sind a' und b' benachbart, und zwar t entweder a' erstes Glied und b' letztes, oder umgekehrt. Paarrotte der Nachbarrotte aus einer Paarrotte ist nur die Paarrotte selbst.

Zu § 12.

Definition. Jede Paarrotte, deren Glieder die Glieder der Paarrotte $\mathfrak{B}$ sind, und die mit dem Anfangsglied von $\mathfrak{B}$ beginnt, nenne ich mit $\mathfrak{B}$ konform.

Lehrsätze. Jede Paarrotte ist mit sich selbst konform. Ist eine Paarrotte mit einer andern konform, so gilt auch das Umgekehrte. Paarrotten, die mit einer Paarrotte konform sind, sind unter sich konform.

Definition. Eine Paarrotte, die mit dem Endglied einer andern Paarrotte beginnt und mit ihrem Anfangsglied endigt, heißt eine Umkehrung der andern.

Lehrsätze. Auch dies ist gegenseitig. Die Umkehrungen einer Paarrotte sind die mit ihr nicht konformen Paarrotten derselben Dinge.

Zu § 13.

Definitionen. Nach dem Ding a das Ding b angeben, heißt auch von a zu b übergehen. Das erste Glied einer Rotte nochmals angeben und von jedem nochmals angegebenen Glied der Rotte, das nicht ihr letztes ist, zum nächstfolgenden übergehen, nenne ich: die Rotte abschreiten.

Kernsätze. Ist $\mathfrak{A}$ irgend eine Rotte, so ist es nach $\mathfrak{A}$ möglich, $\mathfrak{A}$ abzuschreiten. Dies ist, wenn auf $\mathfrak{A}$ ein Geschehnis ε folgt, auch nach ε möglich. Das Abschreiten liefert alle Glieder von $\mathfrak{A}$, und zwar als die Glieder einer neuen Rotte $\mathfrak{A}'$. Die Nachbarrotten aus $\mathfrak{A}'$ sind konform mit denen aus $\mathfrak{A}$[6]).

Definition. Ist jede Nachbarrotte aus einer Rotte $\mathfrak{S}$ konform mit einer Nachbarrotte aus der Rotte $\mathfrak{A}$, so nenne ich $\mathfrak{S}$ konform mit $\mathfrak{A}$.

Lehrsätze. Diese Beziehung ist gegenseitig. Jede Rotte ist sich selbst konform. Rotten, die mit einer Rotte konform sind, sind unter sich konform.

Lehrsätze. Nach jeder Rotte $\mathfrak{A}$ kann ich aus denselben Dingen sowohl konforme als auch nicht konforme Rotten bilden. Folgt auf $\mathfrak{A}$ ein Geschehnis ε, so sind auch nach ε sowohl mit $\mathfrak{A}$ konforme, als auch mit $\mathfrak{A}$ nicht konforme Rotten aus den Gliedern von $\mathfrak{A}$ möglich.

Zu § 14.

Lehrsatz. Wenn Eigennamen k und k' vorliegen, so ist mir immer bekannt, ob diese Eigennamen dasselbe Ding bedeuten oder nicht.

---

[6]) Mit diesen Kernsätzen ist der „Kern“ für das Gebiet der Arithmetik (siehe Fußnote 5) vollständig.

Lehrsatz. Wenn ich eine Rotte der Dinge A abschreite und für edes dabei angegebene Glied beurteile, ob es vom Ding k verschieden st oder nicht, so erhalte ich die Urteile über alle Glieder der Rotte und damit das Urteil darüber, ob k zu den Dingen A gehört oder nicht.

Lehrsatz. Wenn ich eine Rotte der Dinge F abschreite und für edes dabei angegebene Glied beurteile, ob es zu den Dingen A gehört oder nicht, so erhalte ich die Urteile über alle Glieder und somit das Urteil darüber, ob unter den Sammelnamen A auch ein Ding F fällt oder nicht, und im Fall der Bejahung, ob nur ein einziges F und welches, ob mehrere F und welche. Hiernach ist auch entscheidbar, ob alle F Dinge A sind, ob alle A Dinge F sind, ob die Sammelnamen A und F gleichbedeutend sind.

Zu § 15.

Definition. Kann man von einer Aussage K_r über ein Ding r behaupten, daß die Aussage, wenn sie für ein nicht letztes Glied der Rotte $\mathfrak{A}$ gilt, sich auf das nächstfolgende Glied überträgt, so nenne ich K_r eine in der Rotte $\mathfrak{A}$ abschreitbare Aussage.

Lehrsatz. Gilt eine Aussage K_r für das erste Glied einer Rotte $\mathfrak{A}$, und ist die Aussage abschreitbar in $\mathfrak{A}$, so gilt sie für jedes Glied der Rotte.

Definition. Wird die Gültigkeit einer Aussage für alle Glieder einer Rotte mittels des vorstehenden Satzes bewiesen, so nenne ich den Beweis einen Beweis durch Abschreiten.

Zu § 16.

Definition. Von den Dingen A, die in der Rotte $\mathfrak{A}$ enthalten sind, wird auch gesagt, daß sie „in dem Ding M enthalten“ sind, und zwar mit der Maßgabe, daß vom „Ding M“ zunächst in keinem andern Zusammenhang gesprochen werden darf. Das Ding M heißt eine Sammlung.

Definition. Fällt unter den Sammelnamen A ein Ding a und außerdem nur noch ein Ding b, so heißt M ein Paar.

Zu § 17.

Die vorstehende Definition von M ist eine implizite Definition. Durch implizite Definitionen entsteht keine Gefahr für die Richtigkeit von Schlußfolgerungen.

Zu § 18.

Der Inhalt der §§ 1—15 kann auch nach Zulassung der impliziten Definition aufrechterhalten werden.

Definitionen. Das Ding M in § 16 heißt „die“ Sammlung de Dinge A. Die Dinge A heißen die Stücke der Sammlung.

Lehrsatz. Die Sammlung ist nicht Stück von sich selbst.

Zu § 19.

Definitionen. Die Glieder der Rotte $\mathfrak{A}$ von a bis b, bedeutet a, b und die etwa zwischen a und b liegenden Glieder. Man sagt stat dessen: Die Glieder von a an, wenn b das letzte Glied der Rotte ist die Glieder bis b, wenn a das erste ist.

Definitionen. Ist B Sammelname für die Glieder der Rotte von a bis b, a vor b, so heißt die Kette der Angaben der Dinge B i $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt aus $\mathfrak{A}$, und zwar: der Abschnitt von a bis b. Man sag statt dessen: Der Abschnitt von a an, wenn b das letzte Glied ist; de Abschnitt bis b, wenn a das erste ist.

Definition. Kann man von einer Aussage über einen Abschnit der Rotte $\mathfrak{A}$, der mit dem ersten Glied anfängt, behaupten, daß di Aussage, wenn sie für einen Abschnitt gilt, sich auch auf den bis zum nächstfolgenden Glied reichenden Abschnitt überträgt, so nenne ic die Aussage: eine in der Rotte $\mathfrak{A}$ abschreitbare Aussage über den Ab schnitt.

Lehrsatz. Es sei $\mathfrak{A}$ irgend eine Rotte, aber nicht Paarrotte, das nächstfolgende Glied nach dem ersten. Gilt dann eine auf eine Abschnitt von $\mathfrak{A}$ bezügliche Aussage für den Abschnitt bis m, und i die Aussage in $\mathfrak{A}$ abschreitbar, so gilt sie für $\mathfrak{A}$ selbst.

Definition. Das letzte Glied einer Rotte nochmals angebe und von jedem nochmals angegebenen Glied, das nicht erstes ist, zu nächstvorhergehenden übergehen, nenne ich: die Rotte rückwärts ab schreiten.

Definitionen. Ist $\mathfrak{B}$ der Abschnitt einer Rotte $\mathfrak{A}$, der nur d letzte Glied z von $\mathfrak{A}$ nicht enthält, so sagt man statt: eine Rotte $\mathfrak{A}$ bilde auch: z an $\mathfrak{B}$ anfügen. Kann man von einer Aussage über eine Rot behaupten, daß die Aussage, wenn sie für eine Rotte gilt, auch nach A fügen eines Gliedes gültig bleibt, so nenne ich die Aussage: eine abschrei bare Aussage über Rotten.

Lehrsatz. Ist eine Aussage über Rotten, die für jede Paarrot gilt, abschreitbar, so gilt sie für jede Rotte.

Definitionen. Die Sammlung bilden, die alle Stücke der Samm lung M enthält und außerdem nur noch das Ding z, heißt auch: z zu hinzufügen. Kann man von einer Aussage über eine Sammlung behaupte

aß die Aussage, wenn sie für eine Sammlung gilt, auch nach Hinzufügen ines Stückes gültig bleibt, so nenne ich die Aussage: eine abschreitbare Aussage über Sammlungen.

Lehrsatz. Ist eine Aussage über Sammlungen, die für jedes Paar ilt, abschreitbar, so gilt sie für jede Sammlung.

Zu § 20.

Lehrsätze. Ist $\mathfrak{A}$ irgend eine Rotte, so ist es nach $\mathfrak{A}$ möglich, $\mathfrak{A}$ rückwärts abzuschreiten. Dies ist, wenn auf $\mathfrak{A}$ ein Geschehnis ε folgt, uch nach ε möglich. Das Abschreiten rückwärts liefert alle Glieder von $\mathfrak{A}$, und zwar als die Glieder einer neuen Rotte. Jede Nachbarrotte aus der neuen Rotte ist eine Umkehrung aus einer der ursprünglichen Nachbarrotten.

Definition. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Rotten derselben Dinge, und sind die Nachbarrotten aus $\mathfrak{B}$ Umkehrungen von Nachbarrotten aus $\mathfrak{A}$, so heißt $\mathfrak{B}$ eine Umkehrung von $\mathfrak{A}$.

Definition. Kann man von einer Aussage über ein Ding behaupten, daß die Aussage, wenn sie für ein nicht erstes Glied der Rotte $\mathfrak{A}$ gilt, sich auf das nächstvorhergehende überträgt, so nenne ich die Aussage: eine in $\mathfrak{A}$ rückwärts abschreitbare Aussage.

Lehrsatz. Gilt eine Aussage für das letzte Glied einer Rotte $\mathfrak{A}$, und ist die Aussage in $\mathfrak{A}$ rückwärts abschreitbar, so gilt sie für jedes Glied von $\mathfrak{A}$.

III. Zuordnung zwischen Sammlungen.

Auszug aus GA § 6—9.

1. Es sei C der Sammelname der Dinge a, b, c; Γ der Sammelname anderer Dinge $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\mathfrak{K}$ der der Paare $a\alpha, b\beta, c\gamma$. Dann besteht jedes Paar aus einem C und einem Γ, und zwar wiederholt sich in den Paaren weder ein C noch ein Γ. Beim Bilden der Paare sind die C vollständig benutzt worden, von den Γ ist noch δ unbenutzt; aber um mit δ ein Paar zu bilden, das aus einem C und einem Γ besteht, muß ich darauf verzichten, daß sich kein C wiederholt.

Allgemein gilt der Satz: Sind Dinge A und andere Dinge A angegeben, so sind Paare $\mathfrak{H}$ möglich mit folgenden Eigenschaften: jedes Paar besteht aus einem A und einem A; kein A oder A wiederholt sich in den Paaren; will ich ein weiteres Paar aus einem A und einem A bilden, so muß ich ein A oder ein A wiederholen.

Aus den A und den A die Paare $\mathfrak{H}$ bilden, heißt: die A und die durch die $\mathfrak{H}$ einander *zuordnen*.

2. Hiernach kann ich stets, wenn Dinge A und andere Dinge A a gegeben sind, die A und die A einander zuordnen, etwa durch die Paare $\mathfrak{H}$ aber auch durch andere Paare. Kommen in den $\mathfrak{H}$ die A und die vollständig vor, so sage ich: durch die $\mathfrak{H}$ werden die A und die A ei ander *total* zugeordnet. Kommen etwa die A vollständig vor, die A ab nicht, so sage ich: durch die $\mathfrak{H}$ werden die A den A *exzessiv*, die A d A *defektiv* zugeordnet.

Es ist nicht möglich, die A den A durch gewisse Paare total u durch andere nicht total, oder durch gewisse Paare exzessiv und dur andere defektiv zuzuordnen.

3. Es sei $\mathfrak{A}$ die Sammlung der A, $\mathfrak{B}$ die der B. Zunächst nehm ich wieder an, daß die A von den B verschieden sind. Ist dann d Zuordnung zwischen den A und den B total, so nenne ich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ei ander *ebenbürtig*; ist die Zuordnung der B zu den A exzessiv, mithin d der A zu den B defektiv, so sage ich: $\mathfrak{B}$ ist *stärker* als $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ ist *schwäch* als $\mathfrak{B}$.

In diesen Redewendungen kann an die Stelle von $\mathfrak{A}$ eine Rotte d A treten, ebenso an die Stelle von $\mathfrak{B}$ eine Rotte der B.

4. Die Forderung, daß die A von den B verschieden sein solle lasse ich jetzt fallen.

Ich kann eine — aber nicht nur eine — Rotte $\mathfrak{N}$ angeben, die ke Stück von $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ enthält und stärker ist als $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$; sodann in ein und nur ein Glied a so, daß $\mathfrak{A}$ dem Abschnitt bis a, ein und n ein Glied b so, daß $\mathfrak{B}$ dem Abschnitt bis b ebenbürtig ist. Ob dann mit b zusammenfällt, oder b auf a folgt, oder b vor a vorangeht, hän nur von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ab, nicht davon, welche Rotte $\mathfrak{N}$ zugezogen wi Haben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ kein Stück gemein, so sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ebenbürtig, we a mit b zusammenfällt. Unter derselben Annahme ist, wenn a und verschieden sind, $\mathfrak{B}$ stärker oder schwächer als $\mathfrak{A}$, je nachdem b auf folgt oder vor a vorangeht.

Hierauf gestützt, nenne ich, auch wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ein Stück oo Stücke gemein haben, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ebenbürtig, $\mathfrak{B}$ stärker als $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ schwäch als $\mathfrak{A}$, je nachdem bei Zuziehung einer Rotte in dieser a mit b zusamm fällt, oder b auf a folgt, oder b vor a vorangeht. Auch hier gilt Nr Absatz 2. Jede Sammlung oder Rotte ist als sich selbst ebenbürtig bezeichnen.

5. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Paare, so sind sie ebenbürtig. Ist $\mathfrak{A}$ ein Paar, $\mathfrak{B}$ aber nicht, so ist $\mathfrak{A}$ schwächer als $\mathfrak{B}$. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ebenbürtig, und ist $\mathfrak{A}$ ein Paar, so ist auch $\mathfrak{B}$ ein Paar.

Ist $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}$ ebenbürtig, stärker als $\mathfrak{A}$, schwächer als $\mathfrak{A}$, so gilt dies auch, wenn $\mathfrak{A}$ durch eine mit $\mathfrak{A}$ ebenbürtige Sammlung oder Rotte ersetzt wird. Ist $\mathfrak{A}$ schwächer als $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ schwächer als $\mathfrak{C}$, so ist $\mathfrak{A}$ schwächer als $\mathfrak{C}$.

Zu jeder Sammlung $\mathfrak{A}$ *gibt es* (d. h. kann man angeben) ebenbürtige Sammlungen, auch solche, die mit $\mathfrak{A}$ kein Stück gemein haben. Sind Sammlungen angegeben, so gibt es eine Sammlung, die stärker ist als alle angegebenen. Zu jeder Sammlung, die kein Paar ist, gibt es schwächere.

6. Sind alle Stücke der Sammlung $\mathfrak{M}$ Stücke der Sammlung $\mathfrak{N}$, aber nicht umgekehrt, so heißt $\mathfrak{M}$ ein *Teil* von $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}$ eine *Erweiterung* von $\mathfrak{N}$. $\mathfrak{M}$ ist nicht Erweiterung von $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}$ nicht Teil von $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ ist schwächer als $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}$ stärker als $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ heißt *kleiner* als $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}$ *größer* als $\mathfrak{M}$.

Zu jeder Sammlung gibt es größere. Zu jeder Sammlung, die kein Paar ist, gibt es kleinere.

IV. Die natürlichen Zahlen.

Auszug aus GA § 10—15.

1. Es seien irgendwelche Sammlungen angegeben, und es sei ihnen der Sammelname M erteilt. Weiter sei $\mathfrak{Z}$ eine Rotte, die stärker ist als alle M (siehe III, Nr. 5), also keine Paarrotte. Den Gliedern von $\mathfrak{Z}$ erteile ich den Sammelnamen z, dem ersten den Eigennamen e.

Ist dann N eine der Sammlungen M oder überhaupt eine Sammlung, die nicht stärker als $\mathfrak{Z}$ ist, so kann ich unter den auf e folgenden eines und nur eines, etwa n, so angeben, daß der bis n reichende Abschnitt von $\mathfrak{Z}$ der Sammlung N ebenbürtig ist. Zu diesem Glied der Rotte $\mathfrak{Z}$ führt außer N jede mit N ebenbürtige Sammlung, aber keine andere.

Das Ding n heißt die der Rotte $\mathfrak{Z}$ für die Sammlung N entnommene *Zahl*. Alle z außer e sind als „Zahlen“ verwendbar. Umgekehrt kann ich den Vorrat von Zahlen stets den gegebenen Sammlungen M anpassen.

2. Sind die Träger des Sammelnamens D' die Stücke der Sammlung N, so heißt n auch: die der Rotte $\mathfrak{Z}$ entnommene Zahl oder *Anzahl* der Dinge D'. Fallen die Dinge D' unter einen Sammelnamen D, und sind die D' genau diejenigen D, die in einer Sammlung N' vor-

kommen, so heißt hiernach n auch: die Zahl der in der Sammlung N enthaltenen Dinge D.

Diese Ausdrucksweise hat man auf den Fall einer Sammlung N' die von den Dingen D nur *eines* enthält, ausgedehnt. Dadurch wird auch das Glied e der Rotte $\mathfrak{Z}$ als Zahl verwendbar. Ich darf nämlich nennen: die der Rotte $\mathfrak{Z}$ entnommene Zahl der in N' enthaltenen Dinge D. Dabei spricht man von „*den* in N' enthaltenen Dingen D", obwohl es sich nicht um eine Mehrheit solcher Dinge handelt. Man umfaßt also mit der Aussage: die Menge N' enthält Dinge D, *alle* Fälle, wo in der Sammlung N' der Sammelname D vertreten ist.

Für die erste Zahl bedient man sich des Namens *Eins* und des Zeichens 1, für die nächstfolgende des Namens *Zwei* und des Zeichens 2. Die Zahl der Stücke eines jeden Paares ist 2.

3. Nunmehr sind die Glieder der Rotte $\mathfrak{Z}$ ohne Ausnahme Zahlen geworden. Als Glieder einer solchen Rotte können *Einschnitte auf einem Stab* dienen. Ein Einschnitt muß als erster besonders kenntlich gemacht werden; die übrigen Einschnitte werden auf einer und derselben Seite des ersten angebracht, und als nächstfolgendes Glied in der Rotte gilt allemal der zunächst gelegene Einschnitt.

4. War m die Zahl der in der Sammlung N' enthaltenen Dinge D, so sagt man auch: N' enthält m Dinge D, kurz: N' enthält $m\,D$. Hierbei wird m als *adjektivisches Zahlwort* behandelt.

In diese Ausdrucksweise hat die Sprache den Fall einer Sammlung N', in der *keinem* Stück der Sammelname D zukommt, einbezogen und auch ihn dem Fall, der ursprünglich allein in Betracht kam, angeglichen. Von einer solchen Sammlung sagt man nämlich: N' enthält null Dinge D. Dadurch wird das Wort *null* so in Gebrauch genommen, *als wäre es ein* adjektivisches Zahlwort. Dieses Wort führe ich mittels einer *impliziten Definition* ein, indem ich bloß festsetze, in welchen Aussagen (zunächst) das Wort gebraucht werden darf, und was solche Aussagen bedeuten. Siehe I, § 17 und 18.

Ich kann jetzt von der Menge N' unter allen Umständen so sprechen, als wären darin Dinge D enthalten. Der letzte Schritt geschieht, indem man statt: N' enthält null Dinge D, auch sagt: die Zahl der in N' enthaltenen Dinge D ist *Null*. Dadurch wird das Wort „Null" so eingeführt, als wäre es ein *substantivisches Zahlwort*, d. i. Eigenname einer Zahl, auch wieder durch implizite Definition. Für „null" oder „Null" bedient man sich des Zeichens 0.

5. Die Zahlen, die man der Rotte $\mathfrak{Z}$ entnehmen kann, heißen *natürliche Zahlen*. Sind k und l natürliche Zahlen aus $\mathfrak{Z}$, l später als k,

heißt *l höher* als *k*, *k niedriger* als *l*. Jede natürliche Zahl heißt höher als Null.

Die natürlichen Zahlen beginnen mit Eins, Zwei. Die folgenden Zahlen heißen „der Reihe nach“: *Drei*, *Vier*, *Fünf*, *Sechs*, *Sieben*, *Acht*, *Neun*. Für diese Zahlen bedient man sich der Zeichen: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Um solche Zahlen zu ermöglichen, muß die Rotte $\mathfrak{Z}$ in Nr. 1 „stark“ genug gewählt sein. Das Entsprechende gilt für spätere ähnliche Gelegenheiten.

6. Die Zahlzeichen $0, 1, \ldots, 9$ heißen die *Ziffern*. Die entsprechenden Zahlen kann man *Zifferzahlen* nennen. Die nächste Zahl nach 9 heißt *Zehn*. Die Zahl der Ziffern ist also Zehn.

Für die nächsten zehn Zahlen nach 9 bildet man Zahlzeichen dadurch, daß man die Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ abermals hinschreibt, jedesmal aber die Ziffer 1 voranstellt, also: $10, 11, \ldots, 19$. Nunmehr wird die Ziffer 2 an die Spitze gestellt: $20, 21, \ldots, 29$; dann $3, \ldots,$ schließlich 9.

Wir besitzen jetzt Zahlzeichen für die 90 nächsten Zahlen nach 9; das letzte davon ist 99. Wegen der Möglichkeit solcher Zahlen siehe Nr. 5 am Ende.

7. Indem ich vom Sprachgebrauch (siehe Nr. 11, Absatz 2) absehe, kann ich die Zahlzeichen $10, 11, \ldots, 99$ lesen: „Eins Null“, „Eins Eins“, ..., „Neun Neun“. Da diese Zahlennamen durch „Angaben“ von Zifferzahlen zustande kommen, so will ich sie Zifferketten nennen, indem ich bestimme, daß jede Kette aus Angaben von Zifferzahlen, die nicht mit einer Angabe der Null beginnt, eine *Ziffernkette* heißen soll, und zwar eine *n-stellige*, wenn sie aus n Angaben besteht.

Wie in GA § 12 vor der Aufstellung von Def. 38 begründet wird, kann man nicht bloß von konformen Rotten, sondern auch von *konformen Ketten* sprechen. Es sei nämlich $\mathfrak{N}$ die Kette der Angaben A, $\mathfrak{N}'$ die der Angaben A', und es sei die Zahl der A dieselbe wie die der A'. Ist dann in $\mathfrak{N}$ der Gegenstand einer jeden Angabe derselbe wie der Gegenstand der Angabe, die in $\mathfrak{N}'$ „an der gleichen Stelle steht“ (GA § 12, Def. 35), so heißt die Kette $\mathfrak{N}$ konform mit der Kette $\mathfrak{N}'$.

Die Verwendung der Ziffernketten als Zahlennamen hat zur Voraussetzung, daß statt jeder Ziffernkette eine konforme genommen werden kann.

8. Die nächste Zahl nach 99 heißt *Hundert*. Die Zahl der Zahlen von 0 bis 99 ist also Hundert.

Um Zahlzeichen von Hundert an zu schaffen, stelle man den Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ das Zeichen 10 voran, dann 11, dann $12, \ldots,$ schließlich 99, also: $100, 101, \ldots, 999$. An den Zahlzeichen bis 999 beobachtet man nun für den Übergang von einer Zahl zur nächsthöheren folgendes Gesetz:

Wenn das Zahlzeichen nicht aus lauter Neunen besteht, so ersetzt man darin, um das Zeichen der nächsthöheren Zahl zu erhalten, die letzte (oder einzige) von 9 verschiedene Ziffer durch die nächsthöhere Ziffer, jede etwa folgende 9 durch 0; wenn das Zahlzeichen nur aus Neunen bestand, so ersetzt man jede 9 durch 0 und stellt 1 an die Spitze. Geht man *allgemein* nach diesem Gesetz von Ziffernkette zu Ziffernkette weiter, so treten nach GA § 15, Lehrs. 110, keine konformen Ziffernketten auf; man kann daher die gewonnenen Ziffernketten zur Bezeichnung von Zahlen benutzen, ohne befürchten zu müssen, daß verschiedene Zahlen denselben Namen oder dasselbe Zeichen erhalten.

9. Für jede Zahl aus $\mathfrak{Z}$ wird hiernach mittels der Ziffern ein Zeichen und aus dem Zeichen ein Name gewonnen. Durch die Ziffernketten kann man also das Bedürfnis nach Zahlzeichen in jedem vorkommenden Fall befriedigen (siehe Nr. 1). Umgekehrt: Jede nach Belieben hergestellte Ziffernkette wird als Zahlzeichen verwendbar, wenn ich $\mathfrak{Z}$ „stark" genug wähle; siehe Nr. 5 am Ende und GA § 15, Lehrs. 116.

Die Zahlen von 1 bis 9 heißen *einstellig*. Eine Zahl, deren Zeichen r-stellig ist (Nr. 7), heißt eine *r-stellige Zahl*. Es gibt Zahlen von beliebiger Stellenzahl (GA § 15, Lehrs. 115).

Sind zwei Zahlen nicht gleichstellig, so ist die die höhere, deren Stellenzahl die höhere ist (GA § 15, Lehrs. 114). Von zwei gleichstelligen Zahlen, die nicht mit derselben Ziffer anfangen, ist die die höhere, die mit der höheren Ziffer anfängt, Von zwei gleichstelligen Zahlen, die mit derselben Ziffer anfangen, ist die die höhere, die nach Streichung der ersten Ziffer in beiden Zahlen sich als die höhere erweist. Siehe GA § 15, Lehrs. 117.

10. Das Verfahren, bei dem aus gewissen einfachen Zahlzeichen alle höheren zusammengesetzt werden, heißt ein *Positionssystem*; die Zahl der einfachen Zahlzeichen heißt die *Grundzahl* des Systems. Das oben mit Zehn als Grundzahl entwickelte Verfahren, das zur allgemein gebräuchlichen Zahlenschreibung führt, heißt das *dekadische System* (Dezimalsystem); die entsprechenden Zahlwörter usw. heißen *dekadische Zahlwörter*, *Zahlzeichen*, *Zahlennamen*, auch wohl geradezu: dekadische Zahlen.

11. Bei der hier aus den „Grundlagen der Analysis" (1909), § 15 übernommenen Erklärung des dekadischen Systems habe ich nur den Begriff der Kette und die mit ihm eng zusammenhängenden Begriffe, also nur sog. *kombinatorische Begriffe*, benutzt. Die übliche, geschichtlich begründete Erklärung dagegen benutzt außerdem — wenn nicht ausgesprochener Weise, so doch tatsächlich — Addition und Multiplikation

so daß der Erklärung die Lehre von Summe und Produkt vorausgeschickt werden müßte. Wie man aus der in GA und hier gegebenen Darstellung ersieht, ist der auf Addieren und Multiplizieren gegründete Bestandteil der üblichen Erklärung entbehrlich und der kombinatorische Bestandteil ausreichend[7]).

Allerdings wird, wenn man sich auf den kombinatorischen Bestandteil der Erklärung und mithin auf die in Nr. 7 angedeutete Lesung der Zahlen beschränkt, die übliche Lesung der Zahlen noch nicht verständlich. Doch ist diese Lesung für die Arithmetik ohne Bedeutung; überdies ist sie in ihrer Ausführbarkeit begrenzt. Vgl. GA § 24, Lehrs. 188 und Def. 86.

12. Im Laufe der Betrachtung ist die Rotte $\mathfrak{Z}$, die doch der Ausgangspunkt war, ganz in den Hintergrund getreten. Es war nicht mehr davon die Rede, welche *Dinge* ursprünglich als Glieder der Rotte und mithin als Zahlen gewählt waren oder bei der allmählichen Erweiterung der Rotte benutzt werden. Vielmehr wurde nur dafür gesorgt, daß das Bedürfnis nach Namen und Zeichen für Zahlen in jedem Umfang befriedigt würde.

In der Tat darf man, wenn die Namensgebung für die natürlichen Zahlen gesichert ist, ganz davon absehen, welche Dinge dahinter stehen mögen; man braucht nur die *Namen* dieser Dinge festzuhalten, um das zu erreichen, was mit den natürlichen Zahlen bezweckt wird: die Feststellung, ob eine Sammlung einer anderen ebenbürtig ist, ob sie stärker ist als die andere, ob schwächer. Zu einer solchen Feststellung war ursprünglich (III, Nr. 3) unmittelbares Zuordnen, unter Umständen (III, Nr. 4) ein zusammengesetztes Verfahren erforderlich. Mittels der Zahlwörter wird alles auf das Verfahren des *Zählens* (GA § 14) zurückgeführt.

Schlußbetrachtung.

In den Abschnitten I—IV der vorliegenden Schrift wurde das ausgeführt, was in der Einleitung angekündigt war: von Kernbegriffen und Kernsätzen aus wurden auf dem Wege über gewisse Zwischenglieder die

[7]) Auch Herr Pringsheim läßt in seinen „Vorlesungen über Zahlenlehre, I. Abteilung“ (1916) die dekadische Ziffernschrift aus bloß kombinatorischen Vorstellungen hervorgehen; siehe dort S. VII und 4 ff. Wie Herr Pringsheim mir mitteilt, hat er ein Verfahren schon lange vor der Veröffentlichung in Vorlesungen benutzt. Meine Herleitung der dekadischen Ziffernschrift in den „Grundlagen der Anlysis“ (1909) und hier ist jedoch eine in ihrem Wesen ganz andere. Sie ist nicht, wie bei Herrn Pringsheim, gleich an den Eingang der Arithmetik gestellt, vielmehr sind vorher die kombinatorischen Begriffe und Sätze aufgedeckt und bearbeitet worden. Daß dies notwendig war, habe ich hier in der Einleitung ausführlich begründet.

Zahlen im eigentlichen Sinn — die natürlichen Zahlen — und schließlich noch die dekadischen Namen dieser Zahlen erreicht, und zwar so, daß jedes Zwischenglied einzeln zu erkennen war. Ob der gewählte Weg durch einen kürzeren, aber nicht weniger sicheren ersetzt werden kann, lasse ich dahingestellt. Wege, deren Kürze durch Lückenhaftigkeit zustande kommt, sind oft genug eingeschlagen worden.

Die in Abschnitt I aufgetretenen Kernbegriffe und Kernsätze sind in Abschnitt II besonders herausgehoben. Die Sammlung der Kernsätze bildet den „Kern" der Zahlenlehre; daneben möchte ich mich für die Sammlung der Kernbegriffe der Bezeichnung „Begriffskern" bedienen. Am Abschnitt II ergibt sich als Begriffskern der Zahlenlehre: *Ding*, *Eigenname* eines Dings; *Geschehnis*, insbesondere *Angabe* eines Dings; *Sammelname* von angegebenen Dingen; früheres und späteres oder *vorangehendes* und *folgendes* Geschehnis; *unmittelbares Folgen*; *Kette* von Geschehnissen. Wenn dieser Begriffskern mit meiner früheren Aufstellung [8]) nicht ganz genau übereinstimmt und überdies die Sammlung der Kernsätze in Abschnitt II mehrfach über die frühere hinausgreift, so wurde dies durch Erwägungen bedingt, die sich mir je länger je mehr aufgedrängt haben. Während der Ausarbeitung der „Grundlagen der Analysis" trat mir die Notwendigkeit solcher Erwägungen schon entgegen; ich mußte mich aber damals darauf beschränken, an geeigneten Stellen (§ 1 Nr. 4 Abs. 3 Bem. zu Def. 104, 123, 125, 126) Hinweise einzufügen. Bei der Arbeit an dem Buch „Veränderliche und Funktion" war ich von Anfang an bemüht, zu jenen Fragen — sie werden als *Entscheidbarkeitsfragen* bezeichnet — Stellung zu nehmen; das Ergebnis dieser Durchprüfung habe ich am Schluß des Buchs, in den §§ 74—76, dargelegt [9]). Die so erworbene Überzeugung von der Unabweisbarkeit jener Fragen war bahnweisend bei der Abfassung der vorliegenden Schrift.

In der Einleitung habe ich die Frage nach der inneren Folgerichtigkeit der Zahlenlehre erörtert. Ich zeigte, daß diese Frage nur erledigt werden kann, wenn man die Zahlenlehre auf einen Kern zurückführt. Die Ermittelung eines solchen Kerns bezeichnete ich als die Hauptaufgabe dieser Schrift und behauptete im voraus, daß die in den Kern aufzunehmenden Vorstellungen die Eigenschaft der äußersten Einfachheit mit der Eigenschaft, nicht bloß für die Zahlenlehre und überhaupt für die

---

[8]) Grundlagen der Analysis, S. 1—7; Veränderliche und Funktion, S. 1—4. In diesen Schriften sind noch die Bezeichnungen „Grundbegriffe" und „Grundsätze" gebraucht.

[9]) Siehe auch: Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 1918, S. 228—232.

Mathematik, sondern weit über deren Grenzen hinaus unentbehrlich zu sein, verbinden würden. Ob diese vorgreifende Versicherung berechtigt war, muß die Durchsicht von Abschnitt I ergeben, da Abschnitt II nur eine Übersicht über das Vorhergehende bildet und der Inhalt der Abschnitte III und IV lediglich daraus abgeleitet ist. Wenn man nun den in Abschnitt I zurückgelegten Weg nochmals durchwandert und die auf ihm aneinander gereihten Vorstellungen einzeln ins Auge faßt, so wird man in der Tat zugeben müssen, daß keine dieser Vorstellungen aus dem wissenschaftlichen oder selbst dem alltäglichen Denken ausgeschaltet werden kann. An verschiedenen Stellen habe ich auf die alltäglichen Vorgänge ausdrücklich hingewiesen, so besonders in § 4 Nr. 13, § 13 Nr. 56, § 14 Nr. 59.

Die Erkenntnisse, die ich für die Zwecke der Zahlenlehre zu einem „Kern" vereinigt habe, darf ich somit als allgemein unentbehrliche, insbesondere für die Zahlenlehre *notwendige* bezeichnen. Diese Erkenntisse sind für die Zahlenlehre zugleich *hinreichend*. Denn sie führen, wie ich in der vorliegenden Schrift gezeigt habe, zum Inhalt des ausschlaggebenden Abschnitts der „Grundlagen der Analysis", der die ersten 15 Paragraphen umfaßt; daraus aber — und daraus allein — konnte in dem erwähnten Buch alles weiter Erforderliche abgeleitet werden. In dem als notwendig und hinreichend bezeichneten Kern kommt die „Zahl" noch nicht vor; sie wird erst aus dem Kern auf dem im Buch vorgezeichneten Wege herausgearbeitet. Die herkömmliche Ansicht, wonach die Zahl mehr oder weniger fertig an die Spitze gestellt werden darf, kann nur fortbestehen, wenn man die Rolle, die die kombinatorischen und damit überhaupt die hier herausgehobenen Kernbegriffe spielen, nicht würdigt. Die Bedenken gegen diesen Standpunkt habe ich in der Einleitung ausgesprochen. Es ist bezeichnend, daß die Bearbeitungen der Analysis immer von neuen abgelöst werden, die von Grund aus anders verfahren, als die vorhergehenden.

Das Zurückgehen auf einen Kern ist nicht bloß deshalb eine notwendige Arbeit, weil man der Mathematik nur dadurch das Gepräge einer deduktiven Wissenschaft bewahrt, nur dadurch zu einer Begründung für das Vertrauen in ihre innere Folgerichtigkeit, zu einem Urteil über ihre unbedingte Zuverlässigkeit gelangt. Vielmehr wird überhaupt erst durch diese Arbeit für die Untersuchungen über Mathematik, die für die Zwecke einer allgemeinen Denkwissenschaft angestellt werden, der Boden bereitet. Hierher gehört die Frage nach dem Verhältnis der Mathematik zur Erfahrung. Dieses Verhältnis ist in der Geometrie in ganz anderem Maße ausgeprägt, als in der Zahlenlehre, wo Anhaltspunkte dafür kaum zutage treten, solange man sich nicht zur genauesten Zergliederung des

Stoffs entschließt. Bei der Zergliederung aber ergeben sich die Anhaltspunkte von selbst. Ich mußte ihnen in Abschnit I begegnen und konnte dort in der Tat mehrfach darauf hinweisen, wie unsere Kernsätze aus Beobachtungen herauswachsen, so in § 3 Nr. 10, § 4 Nr. 12, § 7 Nr. 23, § 8 Nr. 27, § 10 Nr. 35 und 39, § 13 Nr. 55 und 56, § 14 Nr. 59, § 16 Nr. 68. Ich glaube danach, die in „Veränderliche und Funktion“ S. 3 ausgesprochene Ansicht über den Zusammenhang der Zahlenlehre mit der Erfahrung aufrechterhalten zu dürfen.

(Eingegangen am 4. Dezember 1920.)

Maximum und Minimum einer harmonischen Funktion auf Kreisen.

Von

Alwin Walther in Dresden.

In der nachfolgenden Abhandlung werden einige dem Hadamardschen Dreikreisesatze in der Theorie der Funktionen von komplexen Variablen ähnliche Beziehungen für eine harmonische Funktion (ein reguläres logarithmisches Potential) aufgestellt. Sie führen auf einfachem und natürlichem Wege zum Hadamardschen Dreikreisesatz und erweitern ihn gleichzeitig.

Es sei $u\,(x, y)$ eine im Ringgebiete $0 < \varrho < r < \mathsf{P}$ harmonische Funktion von x und y, d. h. eine dort in jedem inneren Punkte eindeutige und samt ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Außerdem mögen daselbst drei Kreise mit den Radien r_1, r_2, r_3 gezogen sein:

$$\varrho < r_1 < r_2 < r_3 < \mathsf{P};$$

M_1, M_2, M_3 seien die Maxima, m_1, m_2, m_3 die Minima von u auf ihnen. Die Funktion

$$k \log r + u$$

ist im Ringgebiete $r_1 \leqq r \leqq r_3$ harmonisch. Nach dem Satze von Maximum und Minimum[1]) erreicht sie sowohl ihren größten wie ihren kleinsten Wert am Rande, wofern sie nicht etwa konstant ist. Sicher ist also

$$(*) \qquad k \log r_2 + M_2 \leqq \mathrm{Max}\,(k \log r_1 + M_1,\ k \log r_3 + M_3),$$

$$(**) \qquad k \log r_2 + m_2 \geqq \min\,(k \log r_1 + m_1,\ k \log r_3 + m_3).$$

[1]) Osgood, Funktionentheorie I, 3. Aufl., S. 622.

Wählt man insbesondere in (*)

$$k = \frac{M_1 - M_3}{\log r_3 - \log r_1}$$

und in (**)

$$k = \frac{m_1 - m_3}{\log r_3 - \log r_1},$$

so werden die beiden Ausdrücke hinter Max und min je einander gleich:

$$\frac{M_1 - M_3}{\log r_3 - \log r_1} \log r_2 + M_2 \leqq \frac{M_1 - M_3}{\log r_3 - \log r_1} \log r_1 + M_1,$$

$$\frac{m_1 - m_3}{\log r_3 - \log r_1} \log r_2 + m_2 \geqq \frac{m_1 - m_3}{\log r_3 - \log r_1} \log r_1 + m_1.$$

Demnach gilt

$$M_1 (\log r_2 - \log r_3) + M_2 (\log r_3 - \log r_1) + M_3 (\log r_1 - \log r_2) \leqq 0,$$

$$m_1 (\log r_2 - \log r_3) + m_2 (\log r_3 - \log r_1) + m_3 (\log r_1 - \log r_2) \geqq 0,$$

in übersichtlicherer Schreibweise

$$(1) \quad \begin{vmatrix} M_1 & \log r_1 & 1 \\ M_2 & \log r_2 & 1 \\ M_3 & \log r_3 & 1 \end{vmatrix} \leqq 0, \qquad (2) \quad \begin{vmatrix} m_1 & \log r_1 & 1 \\ m_2 & \log r_2 & 1 \\ m_3 & \log r_3 & 1 \end{vmatrix} \geqq 0.$$

Im Ringgebiete $0 < \varrho < r < \mathsf{P}$ *ist das Maximum* $M(r)$ *von* u *auf dem Kreise mit Radius* r *eine konvexe, das Minimum* $m(r)$ *eine konkave Funktion von* $\log r$.

Als Anwendung geben wir einen Beweis des Hamadardschen Dreikreisesatzes[2]). Bekanntlich ist, wenn $f(z)$ eine in unserem Ringgebiet eindeutige und reguläre Funktion von $z = x + iy$ bedeutet,

$$u = \log |f(z)|$$

eine harmonische Funktion[3]) in dem Gebiete, das sich ergibt, wenn man die Nullstellen von $f(z)$ etwa durch kleine Kreise ausschließt. M_1, M_2, M_3 seien ihre Maxima auf den Kreisen mit den Radien r_1, r_2, r_3. Ihnen entsprechen Maxima $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \mathsf{M}_3$ von $|f(z)|$:

$$M_1 = \log \mathsf{M}_1, \qquad M_2 = \log \mathsf{M}_2, \qquad M_3 = \log \mathsf{M}_3.$$

Die Maxima von $\log |f(z)|$ auf den Umschließungen der Nullstellen von $f(z)$ kommen gegenüber M_1 und M_3 nicht in Betracht. Durch passende Verkleinerung der ausmerzenden Kreise können sie vielmehr, weil $\log |f(z)|$ in den Nullstellen selbst negativ unendlich wird, beliebig

[2]) Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, § 21, S. 76; dort findet man auch die Originalarbeiten angeführt.

[3]) Osgood, Funktionentheorie I, S. 623.

lein gemacht werden. Daher liefert Formel (1), die darum, wie man eicht sieht, anwendbar bleibt, in

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \log M_1 & \log r_1 & 1 \\ \log M_2 & \log r_2 & 1 \\ \log M_3 & \log r_3 & 1 \end{vmatrix} \leqq 0$$

len Hadamardschen Dreikreisesatz, nach dem $\log M(r)$ eine konvexe Funktion von $\log r$ ist. Durch unseren Beweis dürfte der wahre Grund ür das zweimalige Auftreten des Logarithmus aufgedeckt sein.

Falls im Ringgebiete keine Nullstelle von $f(z)$ liegt, folgt, wenn μ_1, μ_2, μ_3 die Minima von $|f(z)|$ auf den drei Kreisen bezeichnen,

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \log \mu_1 & \log r_1 & 1 \\ \log \mu_2 & \log r_2 & 1 \\ \log \mu_3 & \log r_3 & 1 \end{vmatrix} \geqq 0,$$

l. h. $\log \mu(r)$ ist eine konkave Funktion von $\log r$. Dieses Analogon zum Hadamardschen Dreikreisesatz für das Minimum des absoluten Betrages von $f(z)$ kann natürlich auch durch Anwendung von (3) auf die Funktion $\frac{1}{f(z)}$ gewonnen werden.

Aus (1) und (2) leiten wir noch eine Beziehung für das Anwachsen des Maximums $\mathfrak{M}(r)$ des absoluten Betrages $|u|$ der allgemeinen harmonischen Funktion u her. Dazu schreiben wir (1) und (2) in der Form

$$(1^*) \quad M_1(\log r_2 - \log r_3) + M_2(\log r_3 - \log r_1) + M_3(\log r_1 - \log r_2) \leqq 0,$$

$$(2^*) \quad -m_1(\log r_2 - \log r_3) - m_2(\log r_3 - \log r_1) - m_3(\log r_1 - \log r_2) \leqq 0.$$

Wir behaupten: es ist stets

$$\mathfrak{M} = \operatorname{Max}(M, -m).$$

In der Tat sind ja drei Fälle denkbar:

.	$M > 0$,	$m \geqq 0$,	$-m \leqq 0$;	$\mathfrak{M} = M = \operatorname{Max}(M, -m)$,
.	$M > 0$,	$m < 0$,	$-m > 0$;	$\mathfrak{M} = \operatorname{Max}(M, -m)$,
.	$M \leqq 0$,	$m < 0$,	$-m > 0$;	$\mathfrak{M} = -m = \operatorname{Max}(M, -m)$.

In (1*) und (2*) ist lediglich die mittlere Klammer $\log r_3 - \log r_1$ positiv. Indes lehrt das gleichzeitige Bestehen von (1*) und (2*), daß auch die linke Seite derjenigen Ungleichung, in der sie mit der größeren der beiden Zahlen M_2 und $-m_2$, d. h. mit $\mathfrak{M}_2$ multipliziert auftritt, nicht positiv ist. Ersetzen wir noch in dieser Ungleichung die Faktoren der negativen Klammern $\log r_2 - \log r_3$ und $\log r_1 - \log r_2$ durch $\mathfrak{M}_1$ bez. $\mathfrak{M}_3$, so bleibt ihr Sinn erhalten. So gelangen wir zu der Beziehung

$$(\dagger) \quad \mathfrak{M}_1(\log r_2 - \log r_3) + \mathfrak{M}_2(\log r_3 - \log r_1) + \mathfrak{M}_3(\log r_1 - \log r_2) \leqq 0.$$

Sie kann in die Gestalt gebracht werden:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{M}_1 & \log r_1 & 1 \\ \mathfrak{M}_2 & \log r_2 & 1 \\ \mathfrak{M}_3 & \log r_3 & 1 \end{vmatrix} \leqq 0.$$

Das Maximum $\mathfrak{M}(r)$ *des absoluten Betrages einer in einem Ringgebiet harmonischen Funktion ist dort eine konvexe Funktion von* $\log r$. *Insbesondere ist für* $f(z)$ *in jedem wurzelfreien Ringgebiet*

$$\Lambda(r) = \mathrm{Max}\left(|\log \mathsf{M}(r)|, |\log \mu(r)|\right) = \mathrm{Max}\left|\log|f(z)|\right|$$

eine konvexe Funktion von $\log r$:

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} \Lambda_1 & \log r_1 & 1 \\ \Lambda_2 & \log r_2 & 1 \\ \Lambda_3 & \log r_3 & 1 \end{vmatrix} \leqq 0.$$

Diese Ungleichung enthält die angekündigte Erweiterung des Hadamardschen Dreikreisesatzes für Funktionen von komplexen Variablen.

Briesnitz bei Dresden, den 26. März 1921.

(Eingegangen am 23. April 1921.)

Über die Cesàrosche Summabilität bei Reihen und eine Erweiterung des Grenzwertbegriffs bei integrablen Funktionen.

Von

Gustav Doetsch in Hannover.

Die vorliegende Arbeit zerfällt in zwei, in der Hauptsache parallel laufende Teile, von denen der erste sich mit den Cesàroschen Mitteln bei *Reihen*, der zweite mit analog gebildeten Mitteln bei integrierbaren *Funktionen* beschäftigt. Die Sätze fließen aus gewissen Grenzwerttheoremen der Differenzen- und Differentialrechnung, die auch selbständiges Interesse haben.

Erster Teil.

Über die Cesàrosche Summabilität bei Reihen.

§ 1.

Zwei Grenzwertsätze der Differenzenrechnung.

Ist eine Folge von *reellen* Zahlen gegeben: $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \ldots$ so setzen wir:

$$\begin{aligned}
&\Delta\gamma_n = \gamma_n - \gamma_{n-1} && (n \geqq 1),\\
&\Delta^2\gamma_n = \Delta\gamma_n - \Delta\gamma_{n-1} && (n \geqq 2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\\
&\Delta^r\gamma_n = \Delta^{r-1}\gamma_{n-1} - \Delta^{r-1}\gamma_{n-1} && (n \geqq r).
\end{aligned}$$

Satz I. *Ist*

$$\frac{\gamma_n}{n^k} \to A \quad \textit{für} \quad n \to \infty$$

und

$$\frac{\Delta^2\gamma_n}{n^{k-2}} > -c \quad \textit{für} \quad n \geqq n_0 \geqq 2,$$

wo A und k beliebige reelle Konstante und $c > 0$, so ist

$$\frac{\Delta \gamma_n}{n^{k-1}} \to A\,k.$$

Beweis. Der Spezialfall $k = 1$ dieses Satzes ist von Herrn Fujiwara[1] bewiesen worden. Seine Methode läßt sich auch im allgemeinen Fa anwenden. — Durch Induktion beweist man leicht folgende Formel:

$$\gamma_m - \gamma_n = (m-n)\Delta\gamma_n + \Delta^2\gamma_m + 2\Delta^2\gamma_{m-1} + 3\Delta^2\gamma_{m-2} + \ldots + (m-n)\Delta^2\gamma_n$$

für $m > n \geqq 1$.

Unter den Voraussetzungen unseres Satzes ist also für $m > n \geqq n_0$

$$\frac{\gamma_m - \gamma_n}{(m-n)\,n^{k-1}} > \frac{\Delta\gamma_n}{n^{k-1}}$$

$$\frac{c}{(m-n)\,n^{k-1}}\left\{m^{k-2} + 2(m-1)^{k-2} + 3(m-2)^{k-2} + \ldots + (m-n)(n+1)^{k-2}\right.$$

In der Klammer stehen die Werte der Funktion $g(x) = (x+1)(m-x)^{k-}$ für die ganzzahligen Argumente des Intervalls J: $0 \leqq x \leqq m - n - 1$. Für $k \leqq 2$ wächst $g(x)$ in diesem Intervall sicher, für $k > 2$ aber auch wenn nur m hinreichend groß und n so nahe an m gelegen ist, da $\frac{m}{n} < \frac{k-1}{k-2}$ ist $\left(\frac{k-1}{k-2} > 1\right)$. Denn $g(x)$ hat Extrema bei den Wurzeln vo

$$0 = g'(x) = (m-x)^{k-2} - (x+1)(k-2)(m-x)^{k-3},$$

also im Falle $k > 3$ bei $x_1 = m$ und $x_2 = \frac{m-k+2}{k-1}$, im Falle $2 < k \leqq$ nur bei $x_2 = \frac{m-k-2}{k-1} \cdot \cdot x_1$ liegt außerhalb J; x_2 ebenfalls, wenn $\frac{m}{n} < \frac{k-}{k-}$ denn dann ist a fortiori

$$\frac{m}{n} < \frac{k-1}{k-2} + \frac{1}{n(k-2)},$$

also

$$m - n - 1 < \frac{m-k+2}{k-1}.$$

$g(x)$ ist also in J monoton. Für hinreichend große m ist aber $g(1) > g(0$ also wächst $g(x)$ in J sicher, wenn im Falle $k > 2$ nur m hinreicher groß und $\frac{m}{n} < \frac{k-1}{k-2}$ ist. Unter diesen Bedingungen erhalten wir also b $m > n$ die Abschätzung:

$$(1) \qquad \frac{\gamma_m - \gamma_n}{(m-n)\,n^{k-1}} > \frac{\Delta\gamma_n}{n^{k-1}} \cdot \frac{c}{(m-n)\,n^{k-1}}(m-n)^2(n+1)^{k-2}$$

$$= \frac{\Delta\gamma_n}{n^{k-1}} - c\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-2}\left(\frac{m}{n} - 1\right).$$

---

[1] Matsusaburô Fujiwara, *Über summierbare Reihen und Integrale.* T Tôhoku mathematical journal 15 (1919), S. 323–329 (S. 325, 326).

Weiterhin gilt die zu der zuerst benutzten analoge Formel:

$$\gamma_m - \gamma_n = (m-n)\Delta\gamma_n + \Delta^2\gamma_{m+2} + 2\Delta^2\gamma_{m+3} + 3\Delta^2\gamma_{m+4} + \ldots + (n-m-1)\Delta^2\gamma_n$$

für $n > m+1 \geqq 1$.

Unsere Voraussetzungen liefern also bei $n > m+1 \geqq n_0 - 1$:

$$\frac{\gamma_m - \gamma_n}{(n-m)\,n^{k-1}} < \frac{\Delta\gamma_n}{n^{k-1}}$$

$$\frac{c}{(n-m)\,n^{k-1}}\left\{(m+2)^{k-2} + 2(m+3)^{k-2} + 3(m+4)^{k-2} + \ldots + (n-m-1)\,n^{k-2}\right\}.$$

Eine ähnliche Überlegung wie oben zeigt, daß die Glieder in der Klammer wachsen, wenn nur m hinreichend groß ist und im Falle $k < 1$ die Zahl m so nahe an n liegt, daß $\frac{m}{n} > \frac{1-k}{2-k}$ ist $\left(\frac{1-k}{2-k} < 1\right)$. Unter diesen Bedingungen finden wir also bei $n > m+1$:

$$\frac{\gamma_m - \gamma_n}{(m-n)\,n^{k-1}} < \frac{\Delta\gamma_n}{n^{k-1}} + \frac{c}{(n-m)\,n^{k-1}}(n-m-1)^2\,n^{k-2} < \frac{\Delta\gamma_n}{n^{k-1}} + c\left(1 - \frac{m}{n}\right).$$

Wir lassen nun m und n gegen ∞ wachsen und zwar so, daß $\frac{m}{n}$ gegen eine feste Zahl $\varepsilon + 1$ strebt, wobei

im Falle $m > n$ bei $k > 2$

$$1 < \varepsilon < \frac{k-1}{k-2},$$

„ „ $n > m+1$ bei $k < 1$

$$1 > \varepsilon > \frac{k-1}{k-2}$$

sein soll. Nach Voraussetzung ist

$$\gamma_m = A\,m^k + o(m^k),$$
$$\gamma_n = A\,n^k + o(n^k),$$

also bei $\frac{m}{n} \to \varepsilon$:

$$\gamma_m - \gamma_n = A\,n^k\left(\left(\frac{m}{n}\right)^k - 1\right) + o(n^k),$$

$$\frac{\gamma_m - \gamma_n}{(m-n)\,n^{k-1}} = \frac{\gamma_m - \gamma_n}{n^k\left(\frac{m}{n} - 1\right)} = A\,\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^k - 1}{\frac{m}{n} - 1} + o(1),$$

folglich

$$\frac{\gamma_m - \gamma_n}{(m-n)\,n^{k-1}} \to A\,\frac{\varepsilon^k - 1}{\varepsilon - 1}$$

Aus unseren Abschätzungen (1) und (2) geht also hervor:

$$A\,\frac{\varepsilon^k - 1}{\varepsilon - 1} \geqq \limsup_{n=\infty} \frac{\Delta\gamma_n}{n^{k-1}} - c(\varepsilon - 1) \qquad (\varepsilon > 1),$$

$$A\,\frac{\varepsilon^k - 1}{\varepsilon - 1} \leqq \liminf_{n=\infty} \frac{\Delta\gamma_n}{n^{k-1}} + c(1 - \varepsilon) \qquad (\varepsilon < 1).$$

Hierin lassen wir ε von rechts, bzw. von links gegen 1 streben und e halten:

$$A\,k \geqq \limsup_{n=\infty} \frac{\Delta^r \gamma_n}{n^{k-1}},$$

$$A\,k \leqq \liminf_{n=\infty} \frac{\Delta^r \gamma_n}{n^{k-1}},$$

folglich

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Delta^r \gamma_n}{n^{k-1}} = A\,k.$$

Satz II. *Ist*

$$\frac{\gamma_n}{n^{r+d}} \to A \qquad \textit{für } n \to \infty$$

und

$$\frac{\Delta^r \gamma_n}{n^d} > -c \quad \textit{für } n \geqq n_0 \geqq r.$$

wo A beliebig reell, r ganzzahlig $\geqq 2$, $d > -1$ und $c > 0$, so ist

$$\frac{\Delta \gamma_n}{n^{r+d-1}} \to A\,(r+d),$$

$$\frac{\Delta^2 \gamma_n}{n^{r+d-2}} \to A\,(r+d)(r+d-1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\Delta^{r-1} \gamma_n}{n^{1+d}} \to A\,(r+d)(r+d-1)\ldots(2+d).$$

Beweis. Es ist für $n > n_0$:

$$\Delta^{r-1}\gamma_n - \Delta^{r-1}\gamma_{n_0} = \sum_{\nu=n_0+1}^{n} (\Delta^{r-1}\gamma_\nu - \Delta^{r-1}\gamma_{\nu-1}) = \sum_{\nu=n_0+1}^{n} \Delta^r \gamma_\nu;$$

also unter unseren Voraussetzungen

$$\Delta^{r-1}\gamma_n > \Delta^{r-1}\gamma_{n_0} - c \sum_{\nu=n_0+1}^{n} \nu^d > \Delta^{r-1}\gamma_{n_0} - c \sum_{\nu=1}^{n} \nu^d.$$

Im Falle $d \geqq 0$ haben wir

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^d \leqq n^{d+1},$$

im Falle $-1 < d < 0$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^d < \int_0^n \nu^d\, d\nu = \frac{n^{d+1}}{d+1}.$$

Da n^{d+1} für $d > -1$ mit n gegen ∞ wächst, so kann man c_1 so wählen, daß für $n \geqq n_0 \geqq r \geqq 2$

$$\Delta^{r-1}\gamma_n > -c_1\, n^{d+1}$$

t. Ganz ebenso folgt:

$$\Delta^{r-2}\gamma_n > -c_2 n^{d+2} \qquad (c_2 > 0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$\Delta^2 \gamma_n > -c_{r-2} n^{r+d-2} \qquad (c_{r-2} > 0)$$

ir $n \geqq n_0$. Satz I, angewandt auf γ_n und $k = r + d$, liefert:

$$\frac{\Delta\gamma_n}{n^{r+d-1}} \to A(r+d);$$

ngewandt auf $\Delta\gamma_n$ und $k = r + d - 1$:

$$\frac{\Delta^2\gamma_n}{n^{r+d-2}} \to A(r+d)(r+d-1);$$

sw.; zuletzt

$$\frac{\Delta^{r-1}\gamma_n}{n^{1+d}} \to A(r+d)(r+d-1)\ldots(d+2).$$

§ 2.

Sätze über die mit der Cesàroschen Methode summablen Reihen.

Ist die konvergente oder oszillierende Reihe $a_0 + a_1 + \ldots$ gegeben, so efinieren wir mit Cesàro[2]), Herrn Knopp[3]) und Herrn Chapman[4]) eine 'olge von Zahlen $s_n^{(k)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ für festes reelles $k \neq -1, -2, \ldots$ urch

$$s_n^{(k)} = \sum_{\varkappa=0}^{n} \frac{\Gamma(n+k-\varkappa+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n-\varkappa+1)}\, a_\varkappa.$$

Dann gilt die Beziehung

$$\Delta s_n^{(k)} = s_n^{(k-1)}.$$

Hat die Folge der Zahlen

$$\frac{\Gamma(k+1)\, s_n^{(k)}}{n^k} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ei einem bestimmten k für $n \to \infty$ einen Grenzwert, so heißt die Reihe $_0 + a_1 + \ldots$ *summabel* (C, k); ist sie beschränkt oder (bei reellen a_n) inseitig beschränkt, so heißt die Reihe *beschränkt*, bzw. *einseitig beschränkt* (C, k).

---

[2]) E. Cesàro, *Sur la multiplication des séries.* Bulletin des sciences mathématiques, 2e série, **14** (1890), S. 114–120.

[3]) K. Knopp, *Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze.* Inauguraldissertation, Berlin 1907, S. 45.

[4]) S. Chapman, *On non-integral orders of summability of series and integrals.* Proceedings of the London mathematical society, series 2, **9** (1911), S. 369–409.

Ich behaupte nun folgende Theoreme:

Satz 1. *Ist eine reelle Reihe summabel* (C, k) $(k \neq 0, -1, -2 \ldots$ *und einseitig beschränkt* $(C, k-2)$, *so ist sie schon summabel* $(C, k-1$ (im Falle $k = 1$ soll die zweite Voraussetzung bedeuten: $n a_n > -c$).

Beweis. Folgt unmittelbar aus dem Grenzwertsatz I des § 1.

Satz 2. *Ist eine reelle Reihe einseitig beschränkt* (C, d) $(d > -1$ *und von irgendeiner Ordnung k summabel* (C, k), *so ist sie summab* $(C, d+1)$, *d. h. ist sie nicht summabel* $(C, d+1)$, *so ist sie von kein Ordnung summabel* (C, k).

Beweis. Ich wähle r ganzzahlig $\geqq 2$ so groß, daß $r + d \geqq k$ is Dann ist die Reihe bekanntlich auch summabel $(C, r+d)$, und wir e halten aus den Voraussetzungen

$$\frac{\Gamma(r+d+1)\, s_n^{(r+d)}}{n^{r+d}} \to s$$

und

$$\frac{\Gamma(d+1)\, s_n^{(d)}}{n^d} = \frac{1}{(r+d)(r+d-1)\ldots(d+1)} \cdot \frac{\Delta^r\{\Gamma(r+d+1)\, s_n^{(r+d)}\}}{n^d} > -c$$

nach Satz II des § 1:

$$\frac{\Delta^{r-1}\{\Gamma(r+d+1)\, s_n^{(r+d)}\}}{n^{d+1}}$$

$$= (r+d)(r+d-1)\ldots(d+2)\, \frac{\Gamma(d+2)\, s_n^{(d+1)}}{n^{d+1}} \to (r+d)\ldots(d+2)\, s.$$

also

$$\frac{\Gamma(d+2)\, s_n^{(d+1)}}{n^{d+1}} \to s.$$

Die Ergänzung des Satzes 2 für den Fall $d = -1$ wird, wenn m $s_n^{(-1)} = a_n$ definiert, geliefert durch den Satz von Herrn Landau[5]):

Ist eine reelle Reihe summabel (C, k) *und* $n a_n > -c$, *so ist konvergent.*

Sein Spezialfall $k = 1$ ist in Satz 1 enthalten[6]).

Auf Grund von Satz 1 gelingt es, einen Satz von Herrn Rosenblatt dessen Beweis acht Druckseiten lang ist, in wenigen Zeilen zu folgern:

---

[5]) E. Landau, *Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herr Hardy und Axer.* Prac matematyczno-fizycznych 21 (1910), S. 97–177.

[6]) Vgl. Fujiwara, l. c. S. 325, 326.

[7]) A. Rosenblatt, *Über die Multiplikation der unendlichen Reihen.* Bulle de l'académie des sciences de Cracovie, sér. A, (1913), S. 603–631 (S. 612–620). H Rosenblatt beweist den Satz für ganzzahlige k_1, k_2. — Für $k_1 = k_2 = -1$ fällt Satz mit einem Theorem von Herrn Hardy über konvergente Reihen zusamm (G. H. Hardy, *The multiplication of conditionally convergent series.* Proceedings the London mathematical society, series 2, 6 (1908), S. 410–423, theorem *C*).

Satz 3. *Sind zwei Reihen* $a_0+a_1+\ldots$ *und* $b_0+b_1+\ldots$ *beschränkt* (C, k_1). *bzw.* (C, k_2) $(k_1 \geqq -1,\ k_2 \geqq -1)$ *und summabel* $C, k_1+1)$, *bzw.* (C, k_2+1), *so ist ihre Produktreihe* $c_0+c_1+\ldots$, *wo*

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

st, summabel (C, k_1+k_2+2). (Im Falle $k_1 = -1$, bzw. $k_2 = -1$ soll ie erste Voraussetzung bedeuten: $|n a_n| < c$, bzw. $|n b_n| < c$.)

Beweis. Wenn die dem Buchstaben s vorgesetzten Indizes 0, 1, 2 ich auf die Reihen $c_0+c_1+\ldots$, $a_0+a_1+\ldots$, $b_0+b_1+\ldots$ beziehen, o ist

$${}_0s_n^{(k_1+k_2+1)} = \sum_{\nu=0}^{n} {}_1s_\nu^{(k_1)} \cdot {}_2s_{n-\nu}^{(k_2)}.$$

Denn es ist formal[8])

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_1s_n^{(k_1)} x^n = (1-x)^{-(k_1+1)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_2s_n^{(k_2)} x^n = (1-x)^{-(k_2+1)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

lso bei Multiplikation:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} {}_1s_\nu^{(k_1)}\, {}_2s_{n-\nu}^{(k_2)} x^n = (1-x)^{-(k_1+k_2+2)} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu} x^n$$

$$= (1-x)^{-((k_1+k_2+1)+1)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Andererseits ist aber:

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_0s_n^{(k_1+k_2+1)} x^n = (1-x)^{-((k_1+k_2+1)+1)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

woraus die obige Formel folgt. (Sie stimmt bei der Konvention ${}_1s_n^{(-1)} = a_n$ usw. auch für $k_1 = -1$ und $k_2 = -1$.)

Ist nun für $\nu \geqq 1$

$$|{}_1s_\nu^{(k_1)}| < K_1 \nu^{k_1},$$

$$|{}_2s_\nu^{(k_2)}| < K_2 \nu^{k_2},$$

so ist für $n \geqq 2$:

$$|{}_0s_n^{(k_1+k_2+1)}| \leqq |{}_1s_0^{(k_1)}|\, K_2 n^{k_2} + K_1 n^{k_1} |{}_2s_0^{(k_2)}| + K_1 K_2 \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^{k_1} (n-\nu)^{k_2}$$

$$\leqq C_1 n^{k_2} + C_2 n^{k_1} + C_3 n \cdot n^{k_1} n^{k_2}.$$

[8]) Vgl. Knopp, l. c. S. 45.

Da wegen $k_1 \geqq -1$, $k_2 \geqq -1$

$$k_1 + k_2 + 1 \geqq k_1, \qquad k_1 + k_2 + 1 \geqq k_2$$

ist, so gibt es ein $K_0 > 0$, so daß für $n \geqq 2$

$$|{}_0 s_n^{(k_1+k_2+1)}| < K_0 n^{k_1+k_2+1}$$

ist, d. h. die Produktreihe ist beschränkt $(C, k_1 + k_2 + 1)$. Andererseits ist sie aber nach einem allgemeinen Satz[9]) sicher summabel $(C, k_1 + k_2 + 3)$, also nach unserem Satz 1 summabel $(C, k_1 + k_2 + 2)$.

Zweiter Teil.

Über eine Erweiterung des Grenzwertbegriffs bei integrablen Funktionen.

§ 1.

Zwei Grenzwertsätze der Differentialrechnung[10]).

Satz I. *Es sei* $\varphi(x)$ *für* $x \geqq 0$ *reell und zweimal differenzierbar,* A *und* k *beliebig reell,* $c > 0$ und

$$\frac{\varphi(x)}{x^k} \to A \quad \text{für} \quad x \to \infty,$$

$$\varphi''(x) > -c x^{k-2} \quad \text{für} \quad x \geqq x_0 > 0, \text{ d. h. } \varphi''(x) = O_L(x^{k-2})$$

Dann ist

$$\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} \to A k \quad \text{für} \quad x \to \infty^{11}).$$

Beweis. Der Fall $k = 1$ deckt sich mit einem Satz von Herrn Kubota, der von Herrn Fujiwara[12]) sehr einfach vermittels der

---

[9]) Vgl. Chapman, l. c. S. 378.

[10]) Diese Sätze (ohne die Erweiterung zu Satz I) habe ich in meiner Inauguraldissertation: *Eine neue Verallgemeinerung der Borelschen Summabilitätstheorie der divergenten Reihen*, Göttingen 1920, 56 S., S. 36–39, abgeleitet.

[11]) Der entsprechende Satz mit den wesentlich engeren Voraussetzungen: φ'' stetig, $k > 0$ und $\varphi'' = O(x^{k-2})$ läßt sich aus den Theoremen 1b und 5b in Hardy and Littlewood, *Contributions to the arithmetic theory of series.* Proceedings of the London mathematical society, ser. 2, 11 (1913), S. 411–478 (S. 417 und S. 424, 42[illegible] ableiten. Den obigen Grenzwertsatz I, mit der Einschränkung: φ'' stetig, $k >$ [illegible] haben die Herren Hardy und Littlewood in ihrer Arbeit: Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive. Proceedings of the London mathematical society, ser. 2, 13 (1915), S. 174–191 (S. 186, 18[illegible] mit der Bemerkung, daß sie einen Beweis nicht veröffentlicht hätten, benutzt, um ein bereits bewiesenes Theorem auf einem neuen Wege abzuleiten.

[12]) Fujiwara, l. c. S. 323, 324.

Taylorschen Lehrsatzes bewiesen worden ist. Dieselbe Methode führt im allgemeinen Fall zum Ziel.

Es sei $0<\alpha<1$ oder $\alpha>1$. Dann ist für $x>0$:

$$\varphi(\alpha x)=\varphi(x)+(\alpha x-x)\varphi'(x)+(\alpha x-x)^2\frac{\varphi''(\beta x)}{2},$$

wo

$$\beta=1+\vartheta(\alpha-1),\quad 0<\vartheta<1,\quad \text{also } \alpha<\beta<1,\ \text{bzw. } 1<\beta<\alpha$$

ist. Hieraus folgt:

$$\frac{\varphi(\alpha x)-\varphi(x)}{x(\alpha-1)}-x\frac{\alpha-1}{2}\varphi''(\beta x)=\varphi'(x),$$

also

$$\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}}=\frac{\varphi(\alpha x)-\varphi(x)}{x^k(\alpha-1)}-\frac{(\alpha-1)\beta^{k-2}\varphi''(\beta x)}{2}\cdot\frac{}{(\beta x)^{k-2}}.$$

Nun ist nach Voraussetzung

$$\varphi(\alpha x)=A(\alpha x)^k+o(x^k),$$
$$\varphi(x)=Ax^k+o(x^k),$$

mithin

$$\frac{\varphi(\alpha x)-\varphi(x)}{x^k}=A(\alpha^k-1)+o(1).$$

Wegen der Voraussetzung über $\varphi''(x)$ haben wir weiterhin

im Falle $\alpha>1$ für $\beta x>x\geqq x_0$:

$$\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}}<\frac{\varphi(\alpha x)-\varphi(x)}{x^k(\alpha-1)}+\frac{(\alpha-1)\beta^{k-2}}{2}c,$$

also

$$\limsup_{x=\infty}\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}}\leqq A\frac{\alpha^k-1}{\alpha-1}+\frac{c}{2}\gamma^{k-2}(\alpha-1),$$

wo $\gamma=\alpha$ oder 1, je nachdem $k\geqq 2$ oder <2 ist;

im Falle $\alpha<1$ für $\beta x>\alpha x\geqq x_0$:

$$\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}}>\frac{\varphi(\alpha x)-\varphi(x)}{x^k(\alpha-1)}-\frac{(1-\alpha)\beta^{k-2}}{2}c,$$

also

$$\liminf_{x=\infty}\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}}\geqq A\frac{\alpha^k-1}{\alpha-1}-\frac{c}{2}\delta^{k-2}(1-\alpha),$$

wo $\delta=1$ oder α, je nachdem $k\geqq 2$ oder <2 ist.

Lassen wir α von rechts, bzw. von links gegen 1 streben, so erhalten wir:

$$\limsup_{x=\infty}\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}}\leqq Ak,$$

$$\liminf_{x=\infty}\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}}\geqq Ak,$$

woraus folgt:

$$\lim \frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} = A k.$$

Erweiterung des Satzes I. *Es sei $\varphi(x)$ für $x \geqq 0$ reell und zweimal differenzierbar, $\varphi''(x)$ in jedem endlichen Intervall im Riemannschen Sinne eigentlich integrabel, A und k beliebig reell, $0 \leqq d \leqq 1$, $c > 0$ und*

$$\varphi(x) = A x^k + o(x^{k-1+d}) \quad \text{für } x \to \infty,$$
$$\varphi''(x) > -c x^{k-1-d} \quad \text{für } x \geqq x_0 > 0, \text{ d. h. } \varphi''(x) = O_L(x^{k-1-d});$$

dann ist

$$\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} \to A k \quad \text{für } x \to \infty.$$

Beweis. Für $d = 1$ unterscheidet sich dieser Satz von Satz I nur dadurch, daß bei letzterem die Integrabilität von $\varphi''(x)$ nicht vorausgesetzt wird. Es genügt also, den Satz für $0 \leqq d < 1$ zu beweisen. Angenommen, es sei nicht $\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} \to A k$. Dann gibt es eine unendliche gegen $+\infty$ wachsende Folge von Zahlen $x_\nu > x_0 > 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ und eine Zahl $\eta > 0$, so daß entweder

$$\frac{\varphi'(x_\nu)}{x_\nu^{k-1}} > A k + \eta$$

oder

$$\frac{\varphi'(x_\nu)}{x_\nu^{k-1}} < A k - \eta$$

für alle $\nu = 1, 2, \ldots$ ist. Betrachten wir zunächst den *ersten* Fall. Es ist für $x > 0$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}}\right) = \frac{\varphi''(x)}{x^{k-1}} - (k-1)\frac{\varphi'(x)}{x^k},$$

also, da $\varphi''(x)$ integrabel vorausgesetzt wird:

$$\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} = \frac{\varphi'(x_\nu)}{x_\nu^{k-1}} + \int_{x_\nu}^{x} \frac{\varphi''(y)}{y^{k-1}}\, dy - (k-1)\int_{x_\nu}^{x} \frac{\varphi'(y)}{y^k}\, dy.$$

Durch Anwendung der partiellen Integration auf das letzte Integral folgt:

$$(1) \quad \frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} = \frac{\varphi'(x_\nu)}{x_\nu^{k-1}} + \int_{x_\nu}^{x} \frac{\varphi''(y)}{y^{k-1}}\, dy - (k-1)\left(\frac{\varphi(x)}{x^k} - \frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^k}\right) - k(k-1)\int_{x_\nu}^{x} \frac{\varphi(y)}{y^{k+1}}\, dy.$$

Nun ist, wie wir annehmen wollten:

$$(2) \quad \frac{\varphi'(x_\nu)}{x_\nu^{k-1}} > A k + \eta;$$

ferner nach Voraussetzung für $y \geqq x_0$:

$$\frac{\varphi''(y)}{y^{k-1}} > -c\,y^{-d},$$

also für $x \geqq x_\nu$:

$$\int_{x_\nu}^{x} \frac{\varphi''(y)}{y^{k-1}}\,dy \geqq -c\int_{x_\nu}^{x} \frac{dy}{y^d} \geqq -c\,\frac{x-x_\nu}{x_\nu^d}.$$

Wir wählen nun eine feste Zahl $\delta > 0$ so, daß

$$c\delta < \frac{\eta}{6}$$

ist. Für

$$0 \leqq \frac{x-x_\nu}{x_\nu^d} \leqq \delta,$$

d. h. für

$$x_\nu \leqq x \leqq x_\nu + \delta x_\nu^d = \xi_\nu$$

ist dann

$$\int_{x_\nu}^{x} \frac{\varphi''(y)}{y^{k-1}}\,dy > -\frac{\eta}{6}. \tag{3}$$

Weiterhin hat $\frac{\varphi(y)}{y^k}$ für $y \to \infty$ den Grenzwert A. Also gibt es ein X_0, so daß für $x \geqq x_\nu > X_0$

$$\left|(k-1)\left(\frac{\varphi(x)}{x^k} - \frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^k}\right)\right| < \frac{\eta}{6} \tag{4}$$

und ein X_1, so daß für $y > X_1$

$$\left|\frac{\varphi(y)}{y^k}\right| < |A| + 1,$$

also für $x \geqq x_\nu > X_1$

$$\left|\int_{x_\nu}^{x} \frac{\varphi(y)}{y^{k+1}}\,dy\right| \leqq (|A|+1)\frac{x-x_\nu}{x_\nu},$$

folglich

$$\left|k(k-1)\int_{x_\nu}^{x} \frac{\varphi(y)}{y^{k+1}}\,dy\right| \leqq (|A|+1)\,|k(k-1)|\,\frac{x-x_\nu}{x_\nu^d}\cdot\frac{1}{x_\nu^{1-d}},$$

mithin für $X_1 < x_\nu \leqq x \leqq \xi_\nu$

$$\left|k(k-1)\int_{x_\nu}^{x} \frac{\varphi(y)}{y^{k+1}}\,dy\right| \leqq (|A|+1)\,|k(k-1)|\,\frac{\delta}{x_\nu^{1-d}}$$

ist; da $d<1$ ist, so gibt es ein $X_2 > X_1$, so daß für $X_2 < x_\nu \leqq x \leqq \xi_\nu$

$$\left| k(k-1) \int_{x_\nu}^{x} \frac{\varphi(y)}{y^{k+1}} dy \right| < \frac{\eta}{6} \tag{5}$$

ist. Aus (1) bis (5) folgt: Für $\mathrm{Max}(X_0, X_2) = X_3 < x_\nu \leqq x \leqq \xi_\nu$ ist

$$\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} > A k + \frac{\eta}{2}. \tag{6}$$

Da

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi(x)}{x^k}\right) = \frac{\varphi'(x)}{x^k} - k\frac{\varphi(x)}{x^{k+1}},$$

also

$$\frac{\varphi(\xi_\nu)}{\xi_\nu^k} - \frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^k} = \int_{x_\nu}^{\xi_\nu} \frac{\varphi'(x)}{x^k} dx - k \int_{x_\nu}^{\xi_\nu} \frac{\varphi(x)}{x^{k+1}} dx$$

ist, so folgt aus (6) und der Voraussetzung

$$\frac{\varphi(x)}{x^k} = A + o(x^{d-1}) = A + o(1):$$

Für $x_\nu > X_3$ ist

$$\frac{\varphi(\xi_\nu)}{\xi_\nu^k} - \frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^k} > \left(A k + \frac{\eta}{2}\right) \lg \frac{\xi_\nu}{x_\nu} - k \int_{x_\nu}^{\xi_\nu} \frac{A + 0(1)}{x} dx$$

$$= \frac{\eta}{2} \lg \frac{\xi_\nu}{x_\nu} - k \int_{x_\nu}^{\xi_\nu} \frac{o(1)}{x} dx = \left(\frac{\eta}{2} - k\, o(1)\right) \lg \frac{\xi_\nu}{x_\nu}$$

$$= \left(\frac{\eta}{2} + o(1)\right) \lg \left(1 + \frac{\delta}{x_\nu^{1-d}}\right).$$

Für alle hinreichend großen x_ν ist also

$$\frac{\varphi(\xi_\nu)}{\xi_\nu^k} - \frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^k} > \left(\frac{\eta}{2} + o(1)\right) \frac{\delta}{x_\nu^{1-d}} \left(1 - \frac{\delta}{2 x_\nu^{1-d}} + \frac{\delta^2}{3 x_\nu^{2(1-d)}} \cdots\right)$$

$$> \frac{\eta}{4} \cdot \frac{\delta}{x_\nu^{1-d}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{K}{x_\nu^{1-d}} \qquad (K>0)$$

Dies ist aber ein Widerspruch gegen die Voraussetzung

$$\frac{\varphi(x)}{x^k} = A + o\left(\frac{1}{x^{1-d}}\right),$$

nach der von einer Stelle $X = X(K)$ an für alle $x'' > x' > X$

$$\left| \frac{\varphi(x'')}{x''^k} - \frac{\varphi(x')}{x'^k} \right| < \frac{K}{x'^{1-d}}$$

sein muß.

Liegt der *zweite* Fall vor:

$$\frac{\varphi'(x_\nu)}{x_\nu^{k-1}} < Ak - \eta, \tag{7}$$

so schreiben wir die Gleichung (1) in der Form:

$$\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} = \frac{\varphi'(x_\nu)}{x_\nu^{k-1}} - \int_x^{x_\nu} \frac{\varphi''(y)}{y^{k-1}} dy + (k-1)\left(\frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^k} - \frac{\varphi(x)}{x^k}\right) \tag{8}$$

$$+ k(k-1)\int_x^{x_\nu} \frac{\varphi(y)}{y^{k+1}} dy.$$

Da nach Voraussetzung für $y \geqq x_0$

$$-\frac{\varphi''(y)}{y^{k-1}} < cy^{-a}$$

ist, so erhalten wir für $x_\nu > x > x_0$:

$$-\int_x^{x_\nu} \frac{\varphi''(y)}{y^{k-1}} dy \leqq c\,\frac{x_\nu - x}{x^d}.$$

Wählen wir $\delta > 0$ so, daß $c\,\delta < \frac{\eta}{6}$ ist, und nennen wir η_ν das kleinste positive x, das der Ungleichung

$$0 \leqq \frac{x_\nu - x}{x^d} \leqq \delta$$

genügt, für das also die Gleichung $x_\nu - \eta_\nu = \delta\,\eta_\nu^d$ besteht, so gilt für

$$x_0 < \eta_\nu \leqq x \leqq x_\nu$$

die Beziehung:

$$-\int_x^{x_\nu} \frac{\varphi''(y)}{y^{k-1}} dy < \frac{\eta}{6}. \tag{9}$$

Weiterhin ist analog zu (4) für $x \geqq \eta_\nu > X_0$:

$$\left|(k-1)\left(\frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^k} - \frac{\varphi(x)}{x^k}\right)\right| < \frac{\eta}{6} \tag{10}$$

und analog zu (5) für $X_2 < \eta_\nu \leqq x \leqq x_\nu$:

$$\left|k(k-1)\int_x^{x_\nu} \frac{\varphi(y)}{y^{k+1}} dy\right| < \frac{\eta}{6}. \tag{11}$$

Nach (7) bis (11) ist für $\mathrm{Max}(x_0, X_0, X_2) = X_4 < \eta_\nu \leqq x \leqq x_\nu$

$$\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} < Ak - \frac{\eta}{2}. \tag{12}$$

Aus

$$\frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^k} - \frac{\varphi(\eta_\nu)}{\eta_\nu^k} = \int_{\eta_\nu}^{x_\nu} \frac{\varphi'(x)}{x^k}\,dx - k\int_{\eta_\nu}^{x_\nu} \frac{\varphi(x)}{x^{k+1}}\,dx$$

folgt mit Hilfe von (12) und der Voraussetzung $\frac{\varphi(x)}{x^k} = A + o(1)$, sowie der Bemerkung, daß η_ν mit x_ν gegen ∞ strebt, daß für alle hinreichend großen ν

$$\frac{\varphi(x_\nu)}{x_\nu^k} - \frac{\varphi(\eta_\nu)}{\eta_\nu^k} < \left(Ak - \frac{\eta}{2}\right)\lg\frac{x_\nu}{\eta_\nu} - k\int_{\eta_\nu}^{x_\nu} \frac{A + o(1)}{x}\,dx$$

$$= \left(-\frac{\eta}{2} + o(1)\right)\lg\frac{x_\nu}{\eta_\nu} = \left(-\frac{\eta}{2} + o(1)\right)\lg\left(1 + \frac{\delta}{\eta_\nu^{1-d}}\right)$$

$$< -\frac{\eta}{4}\cdot\frac{\delta}{\eta_\nu^{1-d}}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{K}{\eta_\nu^{1-d}}$$

ist. Dies ist abermals ein Widerspruch gegen die Voraussetzung $\frac{\varphi(x)}{x^k} = A + o\left(\frac{1}{x^{1-d}}\right)$, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Bemerkung. Satz I und seine Erweiterung geben eine *hinreichende* Bedingung dafür an, daß man aus $\varphi(x) \sim Ax^k$ auf $\varphi'(x) \sim Akx^{k-1}$ schließen kann. Zum Vergleich zitiere ich als einen der bekanntesten und weittragendsten Sätze dieser Art den Satz von Herrn Landau[13]: *Ist* $\varphi(x) \sim x$ *und* $x \cdot \varphi'(x)$ *nie abnehmend, so ist* $\varphi'(x) \to 1$.

Satz II. *Es sei* $\psi(x)$ *für* $x \geqq 0$ *reell und* r*-mal differenzierbar* $(r \geqq 2)$, $\psi^{(r)}(x)$ *eigentlich integrabel*, A *beliebig reell*, d *beliebig* $\geqq 0$, $c > 0$ *und*

$$\frac{\psi(x)}{x^{r+d}} \to A \quad \text{für } x \to \infty,$$

$$\psi^{(r)}(x) > -cx^d \quad \text{für } x \geqq x_0 > 0, \text{ d. h. } \psi^{(r)}(x) = O_L(x^d).$$

Dann ist

$$\frac{\psi'(x)}{x^{r+d-1}} \to A(r+d),$$

$$\frac{\psi''(x)}{x^{r+d-2}} \to A(r+d)(r+d-1),$$

. . . . . .

$$\frac{\psi^{(r-1)}(x)}{x^{1+d}} \to A(r+d)(r+d-1)\ldots(2+d).$$

---

[13]) E. Landau, *Beiträge zur analytischen Zahlentheorie.* Rendiconti del circolo matematico di Palermo 26 (1908), S. 169–302 (S. 218, 219).

Beweis. Es ist für $y \geqq x_0$:

$$\psi^{(r)}(y) > -cy^d,$$

also für $x \geqq x_0$:

$$\psi^{(r-1)}(x) - \psi^{(r-1)}(x_0) = \int_{x_0}^{x} \psi^{(r)}(y)\,dy \geqq -\frac{c}{d+1}x^{d+1} + \frac{c}{d+1}x_0^{d+1},$$

mithin

$$\psi^{(r-1)}(x) > -c_1 x^{d+1} \qquad (c_1 > 0).$$

Ferner für $x \geqq x_0$:

$$\psi^{(r-2)}(x) - \psi^{(r-2)}(x_0) = \int_{x_0}^{x} \psi^{(r-1)}(y)\,dy \geqq -\frac{c_1}{d+2}x^{d+2} + \frac{c_1}{d+2}x_0^{d+2},$$

also

$$\psi^{(r-2)}(x) > -c_2 x^{d+2} \qquad (c_2 > 0),$$

usw., schließlich

$$\psi''(x) > -c_{r-2}x^{r+d-2} \qquad (c_{r-2} > 0)$$

für $x \geqq x_0$. Satz I, angewandt auf $\varphi(x) = \psi(x)$ und $k = r + d$, liefert:

$$\frac{\psi'(x)}{x^{r+d-1}} \to A(r+d);$$

angewandt auf $\varphi(x) = \psi'(x)$ und $k = r + d - 1$:

$$\frac{\psi''(x)}{x^{r+d-2}} \to A(r+d)(r+d-1);$$

usw.; zuletzt:

$$\frac{\psi^{(r-1)}(x)}{x^{d+1}} \to A(r+d)\ldots(2+d).$$

§ 2.

Sätze über eine Erweiterung des Grenzwertbegriffes.

Es sei eine reelle Funktion $f(x)$ der reellen Variablen x für $x \geqq 0$ definiert und in jedem endlichen Intervall im Riemannschen Sinne eigentlich integrabel. Es kann vorkommen, daß $f(x)$ für $x \to \infty$ einen *Grenzwert* hat; dies entspricht bei Reihen dem Falle der Konvergenz, wo die Partialsummen einen Grenzwert haben. Strebt die Funktion keinem Grenzwert zu, so ist es natürlich, gewisse durch Integrale gebildete Mittelwerte zu betrachten. Dies hat z. B. Herr Hardy[14]) getan: Wenn $f(x)$ keinen Grenzwert hat, so kann doch $\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy$ einen solchen haben;

[14]) G. H. Hardy, *Researches in the theory of divergent series and divergent integrals.* The quarterly journal of pure and applied mathematics **35** (1904), S. 22–66 (S. 53–55).

wenn nicht, dann vielleicht das Mittel dieser Funktion, usw. Diesen von Herrn Hardy betrachteten Funktionen entsprechen bei Reihen die Hölderschen Mittel[15]). Die den Cesàroschen nachgebildeten Mittel ganzzahliger Ordnung würden die Gestalt haben:

$$\frac{k!}{x^k}\int_0^x dy_{k-1}\int_0^{y_{k-1}} dy_{k-2}\cdots dy_1\int_0^{y_1} f(y)\,dy.$$

Beide Arten sind übrigens schon von P. du Bois-Reymond[16]) betrachtet worden. Mittel nichtganzzahliger Ordnung hat man bisher nur für den Fall eingeführt, daß die Funktion $f(x)$ speziell durch ein Integral dargestellt wird, worauf sich eine Summabilitätstheorie für uneigentliche Integrale gründet[17]). Für beliebige integrable Funktionen habe ich nun in meiner Inauguraldissertation folgende, den Rieszschen arithmetischen Mitteln[18]), die bekanntlich den Cesàroschen äquivalent sind, nachgebildeten Mittel[19]) beliebiger positiver Ordnung definiert:

Es sei k eine beliebige reelle Zahl > 0. Ich setze

$$\sigma^{(k)}(x) = \frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^x f(y)\,(x-y)^{k-1}\,dy \quad \text{für} \quad x \geqq 0.$$

Dann heiße die folgendermaßen definierte Funktion:

$$\mu^{(k)}(x) = \frac{\Gamma(k+1)\,\sigma^{(k)}(x)}{x^k} = k\,x^{-k}\int_0^x f(y)\,(x-y)^{k-1}\,dy \quad \text{für} \quad x > 0,$$
$$\mu^{(k)}(0) = f(0)$$

das *Mittel k-ter Ordnung* oder das k-te Mittel von $f(x)$. Hat $\mu^{(k)}(x)$ für $x \to \infty$ einen Grenzwert, so nenne ich $f(x)$ *mediabel k-ter Ordnung* und jenen Grenzwert seinen *Mittelwert k-ter Ordnung*. Hat $f(x)$ für $x \to \infty$ einen Grenzwert, so heiße es mediabel 0-ter Ordnung. Es werde dementsprechend $\sigma^{(0)}(x) = f(x)$ gesetzt. — In diesem Mittelwertbegriff haben wir eine *Erweiterung des Grenzwertbegriffes* vor uns.

---

[15]) O. Hölder, *Grenzwerthe von Reihen an der Convergenzgrenze.* Mathematische Annalen **20** (1882), S. 535–549.

[16]) P. du Bois-Reymond, *Ueber den Convergenzgrad der variablen Reihen und den Stetigkeitsgrad der Functionen zweier Argumente.* Journal für die reine und angewandte Mathematik **100** (1887), S. 331–358 (S. 356).

[17]) Vgl. G. H. Hardy and M. Riesz, *The general theory of Dirichlet's series* (Cambridge tracts No. 18), Cambridge 1915, S. 23, 24.

[18]) M. Riesz, *Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques.* Comptes rendus **152** (12 juin 1911), S. 1651–1654.

[19]) G. Doetsch, Dissertation (vgl. [10]), S. 13, 14.

Ist für $x \geqq x_0 \geqq 0$ bei $K > 0$

$$|\mu^{(k)}(x)| < K \quad \text{bzw.} \quad \mu^{(k)}(x) > -K \quad \text{oder} \quad < K,$$

) nenne ich $f(x)$ *beschränkt*, bzw. *einseitig beschränkt k-ter Ordnung.*

Über den Mittelwertbegriff habe ich folgende Konsistenzsätze bewiesen[20]): *Ist $f(x)$ von k-ter Ordnung mediabel ($k \geqq 0$), so ist es von der höheren Ordnung $k' > k$ mediabel zu demselben Mittelwert. Strebt $f(x)$ gegen $+\infty$, so ist es von keiner Ordnung mediabel.*

Dem Cesàro-Chapmanschen Satz[21]) über die Summabilität der durch auchysche Multiplikation aus zwei summablen Reihen entstandenen roduktreihe entspricht hier der Satz[22]):

Haben $f_1(x)$ und $f_2(x)$ für $x \geqq 0$ stetige Ableitungen, hat $f_1(x)$ den $_1$-ten Mittelwert l_1, $f_2(x)$ den k_2-ten Mittelwert l_2 ($k_1 \geqq 0$, $k_2 \geqq 0$) und t $f_1(0) = f_2(0) = 0$, so hat die Funktion

$$f_0(x) = \int_0^x f_1'(y) f_2(x-y)\,dy = \int_0^x f_2'(y) f_1(x-y)\,dy$$

en $k_1 + k_2 + 1$-ten Mittelwert $l_1 l_2$.

Aus den Sätzen des § 1 leitet man nun sofort die folgenden Theoreme[23]) , die genau den Sätzen von Teil I, § 2 entsprechen.

Satz 1. *Ist eine Funktion $f(x)$ mediabel k-ter Ordnung ($k \geqq 2$) nd einseitig beschränkt $k-2$-ter Ordnung, ferner im Falle $k = 2$ stetig,) ist sie schon mediabel $k-1$-ter Ordnung.*

Beweis. Ich setze

$$\varphi(x) = \Gamma(k+1)\sigma^{(k)}(x),$$

o $\sigma^{(k)}(x)$ die in bezug auf $f(x)$ gebildete Funktion von S. 176 ist. Nun eweist man leicht[24]), daß allgemein für $\varkappa \geqq 0$, $d > 0$

$$\sigma^{(\varkappa+d)}(x) = \frac{1}{\Gamma(d)} \int_0^x \sigma^{(\varkappa)}(y)(x-y)^{d-1}\,dy,$$

lso speziell

$$\sigma^{(k)}(x) = \int_0^x \sigma^{(k-1)}(y)\,dy$$

---

[20]) Doetsch, l. c. S. 15—18.

[21]) Chapman, l. c. S. 378.

[22]) Doetsch, l. c. S. 33. Der Spezialfall $k_1 = k_2 = 0$ dieses Satzes ist von Herrn ardy (*The multiplication of conditionally convergent series.* Proceedings of the ondon mathematical society, series 2, 6 (1908), S. 410—423 [S. 421, 422]) ausgerochen worden.

[23]) Doetsch, l. c. S. 39—41.

[24]) Vgl. Doetsch, l. c. S. 16, 17.

ist. Wegen der Stetigkeit von $\sigma^{(k-1)}(y)$ ist mithin

$$\frac{d}{dx}\sigma^{(k)}(x) = \sigma^{(k-1)}(x),$$

und ebenso

$$\frac{d}{dx}\sigma^{(k-1)}(x) = \sigma^{(k-2)}(x).$$

(Im Falle $k = 2$ ist nach Konvention $\sigma^{(k-2)}(x) = f(x)$ und nach Voraussetzung $f(x)$ stetig, also die letzte Beziehung auch richtig.) Folglich haben wir:

$$\varphi'(x) = \Gamma(k+1)\,\sigma^{(k-1)}(x),$$
$$\varphi''(x) = \Gamma(k+1)\,\sigma^{(k-2)}(x).$$

Da $\frac{\varphi(x)}{x^k} = \mu^{(k)}(x)$ für $x \to \infty$ einen Grenzwert l hat und von einer Stelle an $\frac{\varphi''(x)}{x^{k-2}} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-1)}\,\mu^{(k-2)}(x)$ einseitig beschränkt ist, so ist nach Satz

$$\frac{\varphi'(x)}{x^{k-1}} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k)}\mu^{(k-1)}(x) = k\,\mu^{(k-1)}(x) \to l\,k.$$

Satz 2. *Ist eine Funktion einseitig beschränkt d-ter Ordnung ($d \geqq 0$), im Falle $d = 0$ stetig, und überhaupt von irgend einer Ordnung k mediabel, so ist sie sicher mediabel $d+1$-ter Ordnung.*

Beweis. Ich wähle r ganzzahlig $\geqq 2$ so groß, daß $r + d \geqq k$ ist. Dann ist die Funktion auch mediabel $r+d$-ter Ordnung, und unsere Behauptung folgt aus Satz II, wenn man

$$\psi(x) = \Gamma(r+d+1)\,\sigma^{(r+d)}(x)$$

setzt (vgl. den Beweis von Satz 1).

Aus Satz 2 folgt unmittelbar:

Ist eine Funktion einseitig beschränkt d-ter Ordnung ($d \geqq 0$), im Falle $d = 0$ stetig, und nicht mediabel $d+1$-ter Ordnung, so ist sie von keiner Ordnung mediabel.

Satz 3. *Haben zwei Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ für $x \geqq 0$ stetige Ableitungen, sind sie mediabel k_1+1-ter bzw. k_2+1-ter Ordnung ($k_1 \geqq 0$, $k_2 \geqq 0$) zu den Mittelwerten l_1, bzw. l_2, dagegen beschränkt k_1-ter, bzw. k_2-ter Ordnung und ist $f_1(0) = f_2(0) = 0$, so ist*

$$f_0(x) = \int_0^x f_1'(y)\,f_2(x-y)\,dy$$

schon von $k_1 + k_2 + 2$-ter Ordnung mediabel zum Mittelwert $l_1 l_2$.

Beweis. Unterscheidet man die mit Bezug auf f_0, f_1, f_2 gebildeten -Funktionen von S. 176 durch die unteren Indizes 0, 1, 2, so ist, wie an unschwer beweist[25]):

$$\sigma_0^{(k_1+k_2+1)}(x) = \int_0^x \sigma_1^{(k_1)}(y)\,\sigma_2^{(k_2)}(x-y)\,dy.$$

ach Voraussetzung ist für $x \geqq x_0 > 0$, also, wie aus der Definition der hervorgeht, auch für $x > 0$:

$$\left|\frac{\sigma_1^{(k_1)}(x)}{x^{k_1}}\right| < K_1, \qquad \left|\frac{\sigma_2^{(k_2)}(x)}{x^{k_2}}\right| < K_2,$$

lglich

$$\left|\sigma_0^{(k_1+k_2+1)}(x)\right| \leqq \int_0^x K_1 x^{k_1} K_2 x^{k_2}\,dy = K_1 K_2 x^{k_1+k_2+1},$$

lso

$$\left|\frac{\sigma_0^{(k_1+k_2+1)}(x)}{x^{k_1+k_2+1}}\right| \leqq K_1 K_2.$$

Die Funktion $f_0(x)$ ist mithin beschränkt k_1+k_2+1-ter Ordnung, ußerdem nach dem allgemeinen S. 177 zitierten Satz mediabel k_1+k_2+3-ter rdnung, also nach unserem Satz 1 schon mediabel k_1+k_2+2-ter rdnung.

Hannover, den 9. Mai 1920.

[25]) Doetsch, l. c. S. 28.

(Eingegangen am 6. Juli 1920.)

Partiell inverse und partiell involutorische Kollineationen und die Inzidenzen in zwei kollokale korrelativen Feldern.

Von

Stanislaus Jolles in Berlin.

Die Untersuchungen dieser Arbeit beziehen sich, ausgehend vom Büschl projektiver Punktreihen, zunächst auf eine bemerkenswerte hyperbolis involutorische Paarung des Büschels kollinearer Felder. Sie dienen dar dazu, die Theorie der Inzidenzen in zwei kollokalen korrelativen Felde einfacher und tiefer als bisher zu begründen und durch neue Sätze bereichern. Der Gang der Untersuchung ist kurz folgender:

Alle von einer Gerade g getragenen Büschel projektiver Punktreih haben die identische Involution gemein. Außerdem enthält bekanntli jeder dieser Büschel eine zweite, seine „charakteristische" Involution; s bestimmt den durch sie gehenden Büschel. Im Büschel projektiver Punkt reihen, der eine durch die Projektivität φ auf seine Trägerpunktreihe b zogene Punktreihe enthält, liegt auch die durch die Projektivität φ^{-1} a die Trägerpunktreihe bezogene Reihe. Je zwei solcher, invers projektiv Punktreihen des Büschels bilden die Elementenpaare eines hyperbolis involutorischen Büschels projektiver Punktreihen, dessen Doppelelemen die identische und die charakteristische Involution des Büschels sind.

Der allgemeine Büschel kollinearer Felder $b(g, G)$ enthält weder seinem Bezugsfelde invers kollineare Felder noch ein involutorisches Fe außer dem identisch involutorischen Felde. Seine Felder — die G samtheit aller kollinearen Felder, deren Kollineationen die Punktinv lution $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ wie die zu ihr perspektive Strahleninvolutio $G(aa_i, bb_j, \ldots)$ in sich selbst überführen, dabei deren Deckelemente Ruhe lassen und durch einen gegebenen Punkt einen Büschel homolog Strahlen senden — sind auf sein Bezugsfeld paarweise „partiell inver bezogen (2.); eins von ihnen ist zu diesem „partiell involutorisch". D

artiell inversen Felder des Büschels bilden die Elementenpaare einer yperbolischen Involution, deren Doppelfelder das identisch involutorische nd das zum Bezugsfelde partiell involutorische Feld sind. Der Büschel ollinearer Felder ist speziell, wenn er ein ausgeartetes partiell involutoisches Feld enthält.

Die für den Büschel kollinearer Felder gewonnenen Ergebnisse führen, ie wir schon bemerkten, dazu, die Theorie der Inzidenzen in zwei kolokalen korrelativen Feldern neu zu gestalten. Zwei zu einem Felde η nvers korrelative Felder η_1, η_{-1} sind partiell invers kollinear zu dem ezugsfelde $\bar{\eta}$ des Büschels kollinearer Felder $\eta_1 \eta_{-1}$. Das Wechselpunktystem der korrelativen Felder η, η_1 ist zugleich das Wechselpunktsystem on η und jedem zu η korrelativen Felde des Büschels. Der Büschel $_1 \eta_{-1}$ ist speziell; er enthält ein auf sein Bezugsfeld $\bar{\eta}$ bezogenes einfach usgeartetes partiell involutorisches Feld η_i. Mit dem zu ihm korrelativen 'elde η bildet das Feld η_i ein allgemeines polares Feld π_i, das polare 'unktinzidenzfeld der korrelativen Felder η, η_1. Hingegen bildet das dentisch involutorische Feld η_0 des Büschels $\eta_1 \eta_{-1}$ mit dem zu ihm orrelativen Felde η ein „Punktnullfeld“ π_0 (5.). Je zwei Felder des Büschels kollinearer Felder $\eta_1 \eta_{-1}$, die partiell invers zu seinem Bezugselde $\bar{\eta}$ sind, sind invers korrelativ zu η. Der hyperbolisch involutorische Büschel $\eta_1 \eta_{-1}$ mit den Doppelfeldern η_0, η_i ist also derart auf η bezogen, aß je zwei seiner einander zugeordneten Elemente invers korrelativ zu η ind, und seine Doppelfelder η_0 und η_i mit η das Punktnullfeld π_0 und as polare Feld π_i bilden. Jeder Strahl von π_0 trägt eine Punktinvolution on π_i, deren Punktepaare aus den Wechselpunkten des Feldes η und edes zu η korrelativen Feldes des Büschels $\eta_1 \eta_{-1}$ bestehen.

Zwei kollokale korrelative ebene Felder η, η_1 hat zuerst Seydewitz[1]) ntersucht. Ihm verdanken wir die Bestimmung der in η, η_1 enthaltenen Vechselpunkte und Wechselstrahlen sowie der Punkt- und Strahleninzidenzurven zweier korrelativen Felder. Schröter[2]) vervollständigt diese rundlegenden Untersuchungen und dehnt sie auf zwei korrelative Felder nit imaginären Inzidenzkurven aus. Seine bemerkenswerten Überlegungen estalten sich zum Teil recht umständlich; insbesondere dadurch, daß in hnen bekannte Sätze von Plücker[3]) und Seydewitz nochmals bewiesen werden.

---

[1]) Seydewitz, Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittels projektivischer Gebilde, Arch. d. Math. u. Phys. 8 (1846).

[2]) Schröter, Untersuchung zusammenfallender reziproker Gebilde in der Ebene nd im Raume, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 77 (1874).

[3]) Plücker, System der analytischen Geometrie, 1835, Nr. 102.

1. Alle Würfe homologer Punkte in vier Punktreihen eines Büschel projektiver Punktreihen sind harmonisch, wenn einer von ihnen harmonisch ist. Wir nennen vier solche Punktreihen vier „harmonische" Punktreihen des Büschels und können, gestützt auf diese Definition, den Büschel projektiven Punktreihen in den Projektivitätsbereich der Grundgebilde erster Stufe einreihen sowie seine perspektive Lage zu anderen Gebilden des Bereiches definieren. Enthält der Büschel auf einer Gerade gelegene projektiver Punktreihen die durch die Projektivität φ_m aufeinander bezogenen Punktreihen $A, B, C, \ldots$ und $A_m, B_m, C_m, \ldots$, so enthält er auch die Punktreihe $A_{-m}, B_{-m}, C_{-m}, \ldots$, die durch die Projektivität φ_m auf die Punktreihe $A, B, C, \ldots$ bezogen ist[4]). Die Reihen des Büschels sind also paarweise einander zugeordnet, und zwar sind die homologen Punkte A_m, A_{-m}; B_m, B_{-m}; ... je zweier einander zugeordneten Punktreihen $A_m, B_m, \ldots$ und $A_{-m}, B_{-m}, \ldots$ bzw. harmonisch getrennt durch die Punktepaare A, A_i; B, B_i; ... der im Büschel enthaltenen Involution $AA_i, BB_i, \ldots$, der „charakteristischen" Involution des Büschels. Jedes Punktepaar X, X_i der charakteristischen Involution besteht folglich aus den Doppelpunkten einer hyperbolischen Punktinvolution, deren Punktepaare die X entsprechenden Punkte X_m, X_{-m} je zweier einander zugeordneten Reihen des Büschels bilden. Also:

Werden auf einer Gerade g je zwei Punktreihen eines Büschels projektiver Punktreihen einander zugeordnet, die durch inverse Projektivitäten auf die Reihe g bezogen sind, so wird der Büschel hyperbolisch involutorisch. Seine Doppelelemente bilden die auf die Reihe g durch die identische und die involutorische Projektivität bezogenen zwei Punktreihen des Büschels, ein Elementenpaar dessen zwei ausgeartete projektive Punktreihen. Jeder Punkt X der identischen Punktinvolution und dem Punkte X in der charakteristischen Involution des Büschels zugeordnete Punkt X_i sind die Doppelpunkte einer hyperbolischen Involution; ihre Punktepaare bestehen aus den X entsprechenden Punkten in den einander zugeordneten Reihen des hyperbolisch involutorischen Büschels. Die singulären Punkte der beiden ausgearteten Punktreihen des Büschels projektiver Punktreihen bilden das gemeinsame Punktepaar aller solchen hyperbolischen Involutionen.

2. Die kollinearen Felder einer Ebene η, deren Kollineationen eine gegebene involutorische Punktreihe erster Ordnung $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ und einen zu ihr perspektiven involutorischen Strahlenbüschel erster Ordnung $G(aa_i, bb_i, \ldots)$ in sich selbst überführen, dabei die Doppelelemente

[4]) Jolles, Invarianz und Umkehrung von Projektivitäten und Kollineationen Journ. f. d reine u. angew. Math. **149** (1919), Nr. 2.

er Involutionen in Ruhe lassen und durch einen gegebenen Punkt inen Büschel homologer Strahlen senden, bilden[5]) einen Büschel $b(g, G)$. Der Punkt G und die Gerade g sind die Gegenelemente des gemeinsamen Deckdreiecks GLM der kollinearen Felder. G und g sind stets reell, die Ecken L, M und ihre Gegenseiten können als Doppelelemente bzw. der nvolutionen $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ und $G(aa_i, bb_i, \ldots)$ konjugiert imaginär ein. Im Büschel $b(g, G)$ liegen drei zu seinem Bezugsfelde η halbperspektive[6]) kollineare Felder, das identisch involutorische Feld η_0 sowie rei Felder mit den singulären Punkten G, L, M, die durch einfach ausgeartete Kollineationen auf η bezogen sind. Von den Kollineationen, welche die drei halbperspektiven Felder des Büschels auf η beziehen, nthält die eine die Projektivitäten der Involutionen $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ nd $G(aa_i, bb_i, \ldots)$. Diese halbperspektive Kollineation und das durch ie auf η bezogene Feld η_i sind stets reell. Die beiden übrigen zu η albperspektiv kollinearen Felder des Büschels können gleichzeitig imaginär ein. Von den drei durch ausgeartete Kollineationen auf η bezogenen Feldern des Büschels ist das Feld mit dem singulären Punkte G stets reell, die beiden übrigen sind zugleich mit den beiden zu η halbperspektiv kollinearen Feldern imaginär. Der Büschel kollinearer Felder liegt im Projektivitätsbereiche der Grundgebilde erster Stufe[7]).

Wir nennen die Kollineationen zwischen dem Felde η und zwei Feldern η_1, η_2 des Büschels $b(g, G)$ „partiell invers", wenn die homologen Strahlenbüschel von η_1 und η_2 im Deckpunkte G auf den Büschel G durch nverse Projektivitäten bezogen sind. Je zwei partiell inverse Felder des Büschels kollinearer Felder $b(g, G)$ haben auf dem Deckstrahle g homologe Punktreihen, die durch inverse Projektivitäten auf die Punktreihe g bezogen sind. Die das eine halbperspektive Feld — das Feld η_i — auf η beziehende Kollineation enthalte die Projektivität der Strahleninvolution $G(aa_i, bb_i, \ldots)$. Da die halbperspektive Kollineation, welche die Felder η, η_i aufeinander bezieht, mit der zu ihr partiell inversen identisch ist, so bezeichnen wir sie im folgenden als „partiell involutorisch" und das Feld η_i als das „partiell involutorische Feld η_i" des Büschels kollinearer Felder $b(g, G)$.

---

[5]) Jolles, a. a. O., Nr. 9. Die in Sperrdruck hervorgehobenen Worte habe ich meiner früheren Fassung dieses am angeführten Orte mitbewiesenen Satzes hinzugefügt, um jedes Mißverständnis auszuschließen.

[6]) Auf halbperspektive Kollineationen hat zuerst Reye hingewiesen in seiner Abhandlung: Räumliche Kollineationen, die Involutionen enthalten, Arch. d. Math. u. Phys., Serie 3 **19** (1912), S. 293.

[7]) Jolles, Eine einfache synthetische Ableitung der Grundeigenschaften eines Büschels polarer Felder, Arch. d. Math. u. Phys., Serie 3, **11** (1907), Nr. 6.

Auf dem Deckstrahle g bilden die homologen Punktreihen der ko linearen Felder des Büschels $b(g, G)$ einen zum Büschel kollinearer Felde perspektiven Büschel projektiver Punktreihen. Die Reihen des Büsche sind paarweise invers projektiv zur Punktreihe g und bilden so Paa einer hyperbolischen Involution, deren Doppelpunktreihen bzw. durch d Projektivität seiner identischen Involution und durch die seiner charak teristischen Involution auf g bezogen sind (**1.**). Je zwei zur Punktreihe invers projektive Reihen des Büschels projektiver Punktreihen liegen i zwei zum Felde η partiell invers kollinearen Feldern des Büschels ko linearer Felder $b(g, G)$. Folglich gilt:

Werden in einer Ebene η je zwei Felder des Büschels kollineare Felder $b(g, G)$ einander zugeordnet, die partiell invers zum Felde η sin so wird der Büschel hyperbolisch involutorisch. Ein Elementenpaar d hyperbolisch involutorischen Büschels besteht aus den beiden einfach au gearteten kollinearen Feldern, deren singuläre Punkte bzw. L, M sin Die zwei Doppelfelder des involutorischen Büschels bilden das zum Felde identisch involutorische Feld η_0 und das zu ihm partiell involutorisch Feld η_i. Jeder Strahl x_0 des Feldes η_0 und der dem Strahle $x = x_0$ in entsprechende Strahl x_i sind die Doppelstrahlen eines hyperbolisch involu torischen Strahlenbüschels erster Ordnung, dessen Strahlenpaare aus de Geraden bestehen, die dem Strahle x in den einander zugeordneten Fe dern des hyperbolisch involutorischen Büschels kollinearer Felder en sprechen.

Die Kollineation, die das partiell involutorische Feld η_i auf η beziehl kann einfach ausarten. Jedem Strahle x von η, der durch einen Punkt der Deckgerade g der kollinearen Felder des Büschels geht, entsprich dann in η_i der Strahl x_i, der in der Involution $G(aa_i, bb_i, \ldots)$ der Ver bindungsgerade der Punkte P, G zugeordnet ist. Der Büschel kollineare Felder $b(g, G)$ ist speziell, wenn er ein einfach ausgeartetes partiell in volutorisches Feld η_i enthält. Wird der spezielle Büschel hyperbolisc involutorisch gepaart, indem je zwei seiner Felder einander zugeordne werden, die partiell invers zum Felde η sind, so sind seine Doppelfeld das zu η identisch involutorische Feld η_0 und das zu η partiell involu torische einfach ausgeartete Feld η_i. In dem speziellen Büschel bilden ei gegebener Strahl $x = x_0$ und der ihm in η_i entsprechende Strahl x_i von die Doppelelemente einer hyperbolischen Strahleninvolution, deren Strah lenpaare die x entsprechenden Strahlen in den einander zugeordnete Feldern des hyperbolisch involutorischen Büschels kollinearer Felde sind. Wir werden auf diesen wichtigen Sonderfall im folgenden zurück kommen.

3. Zwei korrelative Felder η, η_1 einer Ebene σ haben i. a. ein einziges sich selbst entsprechendes Dreieck[8]). In ihm entspricht einer Ecke — etwa der Ecke G — die Gegenseite g, während den Ecken L und M die bzw. mit ihnen inzidenten Seiten l und m zugewiesen sind[9]). Die Ecke G und ihre Gegenseite g sind stets reell, die Ecken L, M und die gleichzeitig mit ihnen bzw. inzidenten Seiten l, m können konjugiert imaginär sein. Ist das sich selbst entsprechende Dreieck GLM von η, η_1 reell, so ist, wie sich ohne weiteres ergibt, die Korrelation χ_1 von η, η_1 bestimmt, sobald außer dem Dreiecke GLM ein mit keiner Dreiecksseite inzidenter Punkt P von η und der ihm in η_1 entsprechende Strahl p_1 gegeben sind. Dieser Satz wird im folgenden unter der erweiterten Voraussetzung bewiesen, daß die Ecken L, M des Dreiecks GLM, also auch die bzw. mit ihnen inzidenten Seiten l, m, konjugiert imaginär sein können. Die Ecken L, M werden demnach auf der Dreiecksseite g als die Doppelelemente einer Punktinvolution $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ gegeben, die Seiten l, m als die Doppelelemente einer von der Ecke G ausstrahlenden, zu der Punktinvolution $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ perspektiven Strahleninvolution $G(aa_i, bb_i, \ldots)$; gleichgültig, ob die Involutionen hyperbolisch oder elliptisch sind.

Das Dreieck GLM ist das sich selbst entsprechende Dreieck zweier korrelativen Felder η, η_1, wenn deren Korrelation χ_1 die beiden Involutionen $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ und $G(aa_i, bb_i, \ldots)$ miteinander vertauscht. Soll dann noch (Fig. 1) einem gegebenen Punkte P von η ein gegebener Strahl p_1 von η_1 entsprechen, so muß die Korrelation χ_1 auch den Schnittpunkt P_g von g mit dem Strahle $GP = p_G$ in den Strahl p_{G_1} überführen, der den Punkt $gp_1 = P_{g_1}$ aus G projiziert. Nun vertauscht χ_1 den durch die Involution $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ gehenden Büschel projektiver Punktreihen mit dem durch die Involution $G(aa_i, bb_i, \ldots)$ gehenden Büschel projektiver Strahlenbüschel. In diesem bestimmen aber die Strahlen p_G und p_{G_1} als homologe Elemente die Büschel $G(a_G, \ldots, p_G, \ldots)$ und $G(a_{G_1}, \ldots, p_{G_1}, \ldots)$. Somit muß die Korrelation χ_1 die zum Strahlenbüschel $G(a_G, \ldots, p_G, \ldots)$ perspek-

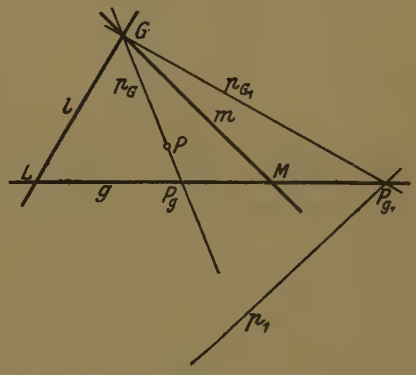

Fig. 1.

[8]) Korrelative Felder η, η_1 mit ∞^2 sich selbst entsprechenden Dreiecken sind jedoch von den folgenden Untersuchungen ausgeschlossen.

[9]) Plücker, System der analytischen Geometrie, 1835, Nr. 100.

tive Punktreihe $g(A_g, \ldots, P_g, \ldots)$ in den Strahlenbüschel $G(a_{G_1}, \ldots, p_{G_1}, \ldots)$ überführen. Endlich verwandelt χ_1 auch die Punktreihe $p_G(G, \ldots, P, \ldots, P_g, \ldots)$ in den Strahlenbüschel $P_{g_1}(g, \ldots, p_1, \ldots, p_{G_1}, \ldots)$. — In den korrelativen Feldern η, η_1 entsprechen also den Punktreihen $g(A_g, \ldots, P_g, \ldots)$ und $p_g(G, \ldots, P, \ldots, P_g, \ldots)$ derart die zu ihnen perspektiven Strahlenbüschel $G(a_{G_1}, \ldots, p_{G_1}, \ldots)$ und $P_{g_1}(g, \ldots, p_1, \ldots, p_{G_1}, \ldots)$, daß dem gemeinsamen Punkte P_g der Punktreihen der gemeinsame Strahl p_{G_1} der Strahlenbüschel entspricht. Das ist aber die genügende und hinreichende Bedingung für die Korrelation zweier Felder[10]). Die ihr gemäß aufeinander bezogenen Felder haben die homologen Elemente P, p_1. Ferner sind G und g Gegenelemente des sich selbst entsprechenden Dreiecks der Felder. Endlich schneidet g den der Punktreihe $g(A_g, \ldots, P_g, \ldots)$ entsprechenden Strahlenbüschel $G(a_{G_1}, \ldots, p_{G_1}, \ldots)$ in einer zu ihr projektiven Punktreihe, die mit ihr im Büschel projektiver Punktreihen mit der charakteristischen Involution $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ liegt. Somit haben die korrelativen Felder auch das sich selbst entsprechende Dreieck GLM.

Wird berücksichtigt, daß die Korrelation χ_1 die Involutionen $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ und $G(aa_i, bb_i, \ldots)$ derart miteinander vertauscht, daß jedes Doppelelement der einen — sei es reell oder imaginär — in das mit ihm inzidente Doppelelement der anderen übergeht, so kann das erlangte Ergebnis auch so ausgesprochen werden:

In einer Ebene gibt es nur eine Korrelation, die eine gegebene Punktinvolution $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ und eine zu ihr perspektive Strahleninvolution $G(aa_i, bb_i, \ldots)$ miteinander vertauscht und dabei jedes Doppelelement der einen in das mit ihm inzidente Doppelelement der anderen und einen gegebenen Punkt P in einen gegebenen Strahl p_1 überführt.

4. Vertauscht in der Ebene σ die Korrelation χ_1 eine gegebene Punktinvolution $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ mit einer zu ihr perspektiven Strahleninvolution $G(aa_i, bb_i, \ldots)$, und gehen dabei die Doppelstrahlen l, m dieser Involution in die bzw. mit ihnen inzidenten Doppelpunkte L, M jener über, so bilden die Punkte G, L, M die Ecken des sich selbst entsprechenden Dreiecks der durch χ_1 aufeinander bezogenen korrelativen Felder η, η_1 (3.). Jeder mit G inzidente Strahl von σ trägt eine Punktreihe, die zu den ihr in η und η_1 entsprechenden Strahlenbüscheln involutorisch liegt. Die einander zugeordneten Punkte dieser Involutionen sind die Wechselpunkte[11]) der korrelativen Felder. Alle Wechselpunktepaare von η, η_1 bilden die Elementenpaare eines speziellen involutorischen quadratischen Punktfeldes; es heiße das „Wechselpunktsystem $[\eta\eta_1]^2$“ de

[10]) Seydewitz, a. a. O., § 19.
[11]) Seydewitz, a. a. O., § 31.

korrelativen Felder η, η_1. Das Hauptdreieck des quadratischen Punktfeldes fällt mit dem sich selbst entsprechenden Dreiecke der korrelativen Felder η, η_1 zusammen.

Durch die Korrelation χ_1^{-1} ist auf η ein Feld η_{-1} korrelativ bezogen. Das Feld η_{-1} ist zu η_1 kollinear. Je zwei Strahlen von η_1, η_{-1} entsprechen einander, die bzw. durch χ_1 und χ_1^{-1} demselben Punkte von η zugewiesen sind. Die Kollineation der Felder η_1, η_{-1} resultiert aus dem Produkte $\chi_1^{-1} \cdot \chi_1^{-1}$ als χ_1^{-2}. Da die Korrelation χ_1 die Involutionen $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ und $G(aa_i, bb_i, \ldots)$ miteinander vertauscht, so sind sie für die Kollineation χ_1^{-2} invariant. Das sich selbst entsprechende Dreieck GLM der korrelativen Felder η, η_1 ist also zugleich das Deckdreieck[12]) der kollinearen Felder η_1, η_{-1}, gleichgültig ob die Ecken L, M reell oder konjugiert imaginär sind.

Die durch die Kollineation χ_1^{-2} aufeinander bezogenen Felder η_1, η_{-1} liegen in dem Büschel $\eta_1 \eta_{-1}$ kollinearer Felder, deren gemeinsames Deckdreieck das Dreieck GLM ist. Durch die Korrelation χ_1 von η, η_1 sind alle Felder des Büschels $\eta_1 \eta_{-1}$ korrelativ so auf η bezogen, daß ihre Korrelationen die Ecke G mit ihrer Gegenseite g im Dreiecke GLM vertauschen. Das Feld η bestimmt folglich mit jedem dieser zu ihm korrelativen Felder nur solche Wechselpunkte, deren Verbindungsgeraden mit G inzident sind. Durch einen gegebenen Punkt $P^{(m)}$ der Ebene von $\eta_1 \eta_{-1}$ geht ein Büschel homologer Strahlen des Büschels kollinearer Felder. Sind $P, P^{(m)}$ ein Paar Wechselpunkte der durch die Korrelation χ_m aufeinander bezogenen Felder η, η_m des Büschels $\eta_1 \eta_{-1}$, so liegen im Strahlenbüschel $P^{(m)}$ insbesondere die P in η_1 und η_m entsprechenden Strahlen p_1 und p_m. Folglich fällt $P^{(m)}$ mit dem Wechselpunkte P' zusammen, der P in den korrelativen Feldern η, η_1 zugeordnet ist. Die Punktepaare des involutorischen quadratischen Punktfeldes $[\eta \eta_1]^2$ bilden also sowohl das Wechselpunktsystem der korrelativen Felder η, η_1 wie auch η, η_m.

Durch P' geht, wenn das Feld η_{-m} durch die Korrelation χ_m^{-1} auf η bezogen ist, der P in η_{-m} entsprechende Strahl p_{-m}. Ferner sind für die Kollineation χ_m^{-2} von η_m und η_{-m} die Involutionen $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ und $G(aa_i, bb_i, \ldots)$ invariant. Das durch die Kollineation χ_m^{-2} auf η_m kollinear bezogene Feld η_{-m} liegt also im Büschel kollinearer Felder $\eta_1 \eta_{-1}$. Beschreibt ein Punkt S die Gerade g, so beschreiben die ihm in η_m und η_{-m} entsprechenden Stahlen s_m, s_{-m} von G die zu dem Strahlenbüschel $G(s, \ldots)$ invers projektiven Strahlenbüschel $G(s_m, \ldots), G(s_{-m}, \ldots)$. Sie liegen im Büschel projektiver Strahlenbüschel mit der charakteristischen

---

[12]) Jolles, Invarianz und Umkehrung von Projektivitäten und Kollineationen. Journ. f. d. reine u. angew. Math. 149 (1919), Nr. 9.

Involution $G(aa_i, bb_i, \ldots)$. Folglich schneiden, wo auch der Punkt S auf g liegen mag, die ihm entsprechenden Strahlen s_m, s_{-m} die Gerade g in zwei Punkten S_m, S_{-m}, die durch den Punkt S und den ihm in der Involution $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ zugeordneten Punkt S_i harmonisch getrennt sind. S_m, S_{-m} sind die dem Strahle s in η_m und η_{-m} entsprechenden Punkte. Fällt insbesondere der Punkt S in den Punkt P_0, in dem der Strahl $GPP' = p_0$ die Gerade g schneidet, so fallen die Punkte S_m, S_{-m} in die Punkte P_{0m}, P_{0-m}, die dem Strahle p_0 in den Feldern η_m, η_{-m} entsprechen. Die Punkte P_m, P_{-m} sind folglich durch das Punktepaar P_0, P_{0i} der Involution $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ harmonisch getrennt und folglich auch die Strahlen p_m, p_{-m} von P durch die Strahlen p_0 und PP_{0i}. Sonach ergibt sich:

Sind die Felder η_1, η_{-1} durch die inversen Korrelationen χ_1, χ_1^{-1} auf das Feld η und also durch die Kollineation χ_1^{-2} aufeinander bezogen, so lassen sich die Felder des Büschels $\eta_1 \eta_{-1}$ so paaren, daß die Felder $\eta_1, \eta_{-1}; \ldots; \eta_m, \eta_{-m}; \ldots$ dieser Paare invers korrelativ zu η sind. Jedes Feld η_m bestimmt mit dem zu ihm korrelativen Felde η das Wechselpunktsystem $[\eta\, \eta_1]^2$ der korrelativen Felder η, η_1. Die Korrelation χ_m von η, η_m vertauscht die Involutionen $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ und $G(aa_i, bb_i, \ldots)$ miteinander und weist einem gegebenen Punkte P des Wechselpunktsystems $[\eta\, \eta_1]^2$ einen Strahl p_m des P zugeordneten Wechselpunktes P' zu. Die Strahlenpaare $p_1, p_{-1}; \ldots; p_m, p_{-m}; \ldots$, die dem Punkte P in den zu η invers korrelativen Feldern $\eta_1, \eta_{-1}; \ldots; \eta_m, \eta_{-m}; \ldots$ des Büschels $\eta_1 \eta_{-1}$ entsprechen, bestehen aus den einander zugeordneten Elementen eines hyperbolisch involutorischen Strahlenbüschels erster Ordnung. Der Mittelpunkt des Strahlenbüschels ist der P zugeordnete Wechselpunkt P'. Die Doppelelemente des involutorischen Strahlenbüschels sind der Verbindungsstrahl p_0 der Wechselpunkte P, P' und der Strahl p_i, der P' mit dem Punkte P_{0i} verbindet, der dem Schnittpunkte P_0 von p_0 und g in der Involution $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ zugeordnet ist.

5. Auf g bilden die homologen Punktreihen der Felder des Büschels $\eta_1 \eta_{-1}$ einen zu diesem Büschel perspektiven Büschel projektiver Punktreihen. Die zur Punktreihe g invers projektiven Reihen des Büschels projektiver Punktreihen liegen in den zum Felde η invers korrelativen Feldern $\eta_1, \eta_{-1}; \ldots; \eta_m, \eta_{-m}; \ldots$ des Büschels kollinearer Felder $\eta_1 \eta_{-1}$. Je zwei zu η invers korrelative Felder von $\eta_1 \eta_{-1}$ sind folglich partiell invers kollinear zu dem Bezugsfelde $\bar{\eta}$ dieses Büschels. Die zu η invers korrelativen Felder $\eta_1, \eta_{-1}; \ldots, \eta_m, \eta_{-m}; \ldots$ bilden also die Paare einer hyperbolischen Involution, deren Doppelfelder die auf $\bar{\eta}$ durch die identische und durch eine partiell involutorische Kollineation bezogenen Felder η_0 und η_i des Büschels $\eta_1 \eta_{-1}$ sind (2.).

Die identisch involutorische Kollineation von $\bar{\eta}, \eta_0$ enthält die Projektivität der auf g gelegenen identischen Punktinvolution, die partiell involutorische Kollineation von $\bar{\eta}, \eta_i$ die Projektivität der Involution $g(AA_i, BB_i, \ldots)$. Somit entspricht in dem Büschel homologer Strahlen, den die kollinearen Felder des Büschels $\eta_1 \eta_{-1}$ nach dem Punkte P' senden, dem Strahle $P'P = p_0$ von $\bar{\eta}$ in η_0 der Strahl p_0 selbst, und in η_i der Strahl p_i, der P' mit dem Punkte P_{0i} verbindet, der dem Punkte $p_0 g = P_0$ in der Involution $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ zugeordnet ist. Die Korrelation von η, η_0 weist also dem Punkte P den mit P inzidenten Strahl p_0 des Punktes G zu, die Korrelation von η, η_i den P' mit P_{0i} verbindenden Strahl p_i; gleichgültig welche Lage der Punkt P auf dem Strahle p_0 annimmt. Der Büschel kollinearer Felder $\eta_1 \eta_{-1}$ ist folglich speziell, die partiell involutorische Kollination der Felder $\bar{\eta}, \eta_i$ einfach ausgeartet (**2.**). Beschreibt P die Ebene η, so bleiben in den korrelativen Feldern η, η_0 die homologen Elemente P, p_0 inzident. Die involutorisch korrelativen Felder η, η_0 bilden ein „Punktnullfeld“[13]) π_0, in dem jedem Punkte P von η der mit ihm inzidente Strahl p_0 von G zugeordnet ist. In den korrelativen Feldern η, η_i entspricht der mit G inzidenten Punktreihe p_0 von η der zu ihr involutorische Strahlenbüschel erster Ordnung P_{0i} von η_i. Dreht sich p_0 um G, so beschreibt das Punktepaar P_0, P_{0i} die Involution $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ und der Strahl p_i alle Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte P_{0i} mit g inzident sind. Die korrelativen Felder η, η_i liegen ebenfalls involutorisch, bilden aber ein allgemeines polares Feld π_i. Es enthält die Involutionen $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ und $G(aa_i, bb_i, \ldots)$, und g ist in ihm die Polare von G. Wir haben demnach bewiesen:

Der Büschel kollinearer Felder $\eta_1 \eta_{-1}$, dessen Elemente mit dem zu ihnen korrelativen Felde η dasselbe Wechselpunktsystem $[\eta \eta_1]^2$ erzeugen, ist speziell. Er enthält ein einfach ausgeartetes zu seinem Bezugsfelde $\bar{\eta}$ partiell involutorisches Feld η_i. Die kollinearen Felder des Büschels $\eta_1 \eta_{-1}$ lassen sich so paaren, daß je zwei partiell inverse Felder $\eta_1, \eta_{-1}; \ldots; \eta_m, \eta_{-m}; \ldots$ des Büschels $\eta_1 \eta_{-1}$ invers korrelativ zu η und Paare einer hyperbolischen Involution sind. Als die Doppelelemente der hyperbolischen Involution ergeben sich die auf $\bar{\eta}$ durch die identische und durch eine einfach ausgeartete partiell involutorische Kollineation bezogenen zwei Felder η_0 und η_i des Büschels $\eta_1 \eta_{-1}$. Ein Elementenpaar der Involution besteht aus zwei einfach ausgearteten kol-

[13]) So sei in Hinblick auf die später durchzuführenden analogen Betrachtungen für den Raum das zweifach ausgeartete polare Feld zweiter Art bezeichnet. Seine Inzidenzkurve ist als Strahlenkurve ein doppelt zu zählender Strahlenbüschel erster Ordnung.

linearen Feldern des Büschels. Das zum Felde η korrelative Feld η_0 bildet mit ihm ein Punktnullfeld π_0, in dem jedem Punkte P der mit ihm und G inzidente Strahl p_0 zugeordnet ist. Hingegen bildet das zum Felde η korrelative Feld η_i mit ihm ein allgemeines polares Feld π_i. In π_i sind der Punkt G und die Gerade g einander zugeordnet und die Involutionen $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ und $G(aa_i, bb_i, \ldots)$ enthalten. Das Wechselpunktsystem $[\eta\,\eta_1]^2$ besteht aus den Involutionen konjugierter Punkte von π_i, die von den Strahlen von G getragen werden. In π_i verbindet die Polare eines gegebenen Punktes P den P zugeordneten Wechselpunkt P' mit dem Punkte P_{0i}, der dem Schnittpunkte P_0 der Geraden PP' und g in der Involution $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ zugeordnet ist. Das polare Feld π_i ist bestimmt, sobald außer den Involutionen $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ und $G(aa_i, bb_i, \ldots)$ zwei Wechselpunkte P, P' des Systems $[\eta\,\eta_1]^2$ gegeben sind.

Die Inzidenzkurve des polaren Feldes π_i ist der Ort aller Punkte von η_{-1}, die mit den ihnen entsprechenden Strahlen in den zu η korrelativen Feldern des Büschels $\eta_1\,\eta_{-1}$ inzident sind. Aus diesem Grunde heiße das polare Feld π_i das „polare Punktinzidenzfeld" und seine Inzidenzkurve die „Punktinzidenzkurve" der korrelativen Felder $\eta, \eta_1; \ldots; \eta, \eta_m; \ldots$

7. Sind in einem polaren Felde ψ der Punkt G und der Strahl g einander zugeordnet, und sind P, P' zwei konjugierte Punkte von ψ, deren Verbindungsgerade mit G inzident ist, so gibt es eine einzige Korrelation χ_1, die P einen mit P' inzidenten Strahl p_1 zuweist und die Involutionen konjugierter Elemente $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ und $G(aa_i, bb_i, \ldots)$ in g und G miteinander vertauscht (**3.**). Die durch χ_1 korrelativ aufeinander bezogenen Felder η, η_1 bestimmen das Wechselpunktsystem $[\eta\,\eta_1]^2$. Es liegt in einem polaren Felde π_i, das die Involutionen $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ und $G(aa_i, bb_i, \ldots)$ enthält, und in dem die Polare des Punktes P den Punkt P' mit dem Punkte P_{0i} verbindet, der den Schnittpunkte P_0 der Geraden PP' und g in der Involution $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ zugeordnet ist (**6.**). In den polaren Feldern π_i und ψ hat somit P die selbe Polare. Beide polaren Felder haben außerdem ∞^1 gemeinsame Polardreiecke. Sie sind folglich identisch[14]). Die Involution konjugierter Punkte von ψ, deren Träger mit einem gegebenen Punkte G inzident sind, bilden sonach das Wechselpunktsystem der korrelativen Felder η, η_1. Kurz:

In einem gegebenen polaren Felde ψ fallen je zwei konjugierte Punkte, die mit einem gegebenen Punkte G auf einer Gerade liegen, mit zwei einander zugeordneten Punkten eines Wechselpunktsystems zusammen, und

[14]) v. Staudt, Geometrie der Lage, 1847, Nr. 237.

umgekehrt sind je zwei Wechselpunkte des Systems in ψ konjugiert. Es gibt ∞^1 zu dem Felde η von ψ korrelative Felder η_1, deren Korrelationen dieses Wechselpunktsystem bedingen; sie bilden einen Büschel kollinearer Felder (4.).

Beschreibt der gegebene Punkt G das Feld η, so folgt nunmehr:

∞^3 zu einem Felde η korrelative Felder bestimmen mit η dasselbe polare Punktinzidenzfeld ψ [15]).

8. In den korrelativen Feldern η, η_1 stehen den Wechselpunkten die Wechselstrahlen dual gegenüber. Jeder Punkt, der mit der Seite g des sich selbst entsprechenden Dreiecks GLM inzident ist, trägt einen Strahlenbüschel, der zu den ihm in η und η_1 entsprechenden Punktreihen involutorisch liegt. Die einander zugeordneten Strahlen dieser Involutionen sind die Wechselstrahlen von η, η_1. Sie bilden die Strahlenpaare eines speziellen involutorischen quadratischen Strahlenfeldes $[\eta\,\eta_1]^{II}$ mit dem Hauptdreiecke GLM.

Die durch die inversen Korrelationen χ_1 und χ_1^{-1} auf η und durch die Kollineation χ_1^{-2} aufeinander bezogenen Felder η_1, η_{-1} liegen in einer Schar kollinearer Felder $\eta_1\,\eta_{-1}$, deren gemeinsames Deckdreieck GLM ist. Die Felder der Schar bestimmen mit dem zu ihnen korrelativen Felde η dasselbe Wechselstrahlensystem $[\eta\,\eta_1]^{II}$ (4.). Die Schar $\eta\,\eta_{-1}$ ist speziell; sie enthält ein einfach ausgeartetes zu ihrem Bezugsfelde $\overline{\eta}'$ partiell involutorisches Feld η_J (5.) und läßt sich so paaren, daß je zwei partiell inverse Felder von $\eta_1\,\eta_{-1}$ invers korrelativ zu η und die Paare einer hyperbolischen Involution werden. Die Doppelelemente der Involution sind das identisch involutorische Feld η_0 und das partiell involutorische Feld η_J. Ein Elementenpaar der Involution besteht aus zwei einfach ausgearteten Feldern der Schar. Einem gegebenen Punkte X des Bezugsfeldes $\overline{\eta}'$ der Schar $\eta_1\,\eta_{-1}$ entspricht in η_J der Punkt X_i, der in der Involution $g\,(AA_i, BB_i, \ldots)$ dem Schnittpunkte der Geraden g und XG zugeordnet ist. Die Punkte X, X_i sind die Doppelelemente einer hyperbolischen Punktinvolution, deren einander zugeordnete Elemente die X entsprechenden Punkte in den einander zugeordneten Feldern der hyperbolischen Involution in der Schar $\eta_1\,\eta_{-1}$ sind. In der Schar $\eta_1\,\eta_{-1}$, deren Felder ja zu η korrelativ sind, liegen zwei zu η polare Felder: das identisch involutorische Feld η_0 und das zu $\overline{\eta}'$ partiell involutorische Feld η_J (6.). Das Feld η_0 bildet mit η ein „Strahlennullfeld" π_0', d. h. ein zweifach ausgeartetes polares Feld erster Art, dessen Inzidenzkurve als Punktort

[15]) Für Wechselpunktsysteme, deren Punktinzidenzfelder reelle Inzidenzkurven haben, von R. Sturm bewiesen in seinem Werke: Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, II, Nr. 309, Leipzig 1908.

die doppelt zu zählende Punktreihe g ist. Das Feld η_J hingegen bildet mit η ein allgemeines polares Feld π_J, in dem die Involutionen $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ und $G(aa_i, bb_i, \ldots)$ enthalten, und der Punkt G und der Strahl g einander zugeordnet sind. Das Wechselstrahlensystem $[\eta\eta_1]^{II}$ besteht aus den Involutionen konjugierter Strahlen im polaren Feld π_J, die von den Punkten von g getragen werden. In π_J ist der Pol eines gegebenen Strahles p der Schnittpunkt des p zugeordneten Wechselstrahles p' mit der Gerade, die dem Verbindungsstrahle der Punkte pp' und G in der Involution $G(aa_i, bb_i, \ldots)$ zugeordnet ist. Das polare Feld π_J ist durch die beiden Involutionen $G(aa_i, bb_i, \ldots)$ und $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ und zwei seiner Wechselstrahlen p, p' bestimmt. Die Tangenten seiner Inzidenzkurve gehen durch die Punkte, die den Tangenten als Strahlen von η in den zu η korrelativen Feldern der Schar $\eta_1\eta_{-1}$ entsprechen. Das polare Feld π_J ist das „polare Strahleninzidenzfeld" und seine Inzidenzkurve als Strahlengebilde die „Strahleninzidenzkurve" von η und jedem zu η korrelativen Felde der Schar $\eta_1\eta_{-1}$. Das polare Punktinzidenzfeld π_J und das polare Strahleninzidenzfeld π_J zweier kollokalen korrelativen Felder η, η_1 enthalten die Involutionen $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ und $G(aa_i, bb_i, \ldots)$, die durch die Korrelation von η, η_1 miteinander vertauscht werden; die polaren Felder π_i, π_J und ihre Inzidenzkurven berühren also einander doppelt[16]). Die zum Felde η invers korrelativen Felder η_1, η_{-1} bestimmen mit ihm dieselben polaren Inzidenzfelder π_i, π_J. In einem gegebenen polaren Felde ψ fallen je zwei konjugierte Strahlen, die sich auf einer Gerade g schneiden, mit zwei einander zugeordneten Strahlen eines Wechselstrahlensystems zusammen, und je zwei Wechselstrahlen dieses Systems sind in ψ konjugiert. Auf das Feld von ψ lassen sich ∞^3 Felder korrelativ so beziehen, daß ψ das polare Strahleninzidenzfeld von η und jedem dieser zu η korrelativen Felder wird.

9. Der Verbindungsgerade p_0 zweier gegebenen Wechselpunkte P, P' der korrelativen Felder η, η_1 entspricht als Strahl von η in η_1 ein Punkt P_{01} auf der Seite g des sich selbst entsprechenden Dreiecks GLM von η, η_1. Die Korrelation χ_1 der Felder weist also den Punkten P, P' von η bzw. die Strahlen $P'P_{01}$ und PP_{01} von η_1 zu. Nun ist der dem Strahle PP_{01} zugeordnete Wechselstrahl von η, η_1 mit dem Punkte P' und dem Schnittpunkte P_{01} der Strahlen PP_{01} und g inzident, also der Strahl $P'P_{01}$ selbst. Die Korrelation χ_1 verwandelt folglich das Wechselpunktfeld $[\eta\eta_1]^2$ der korrelativen Felder η, η_1 in deren Wechselstrahlenfeld $[\eta\eta_1]^{II}$. Analog führt χ_1^{-1} das Wechselpunktfeld $[\eta\eta_1]^2$ in das Wechselstrahlenfeld $[\eta\eta_1]^{II}$ über.

---

[16]) Schröter, a. a. O., Nr. 4.

Je zwei Wechselpunkte von η, η_1 sind in dem polaren Punktinzidenzfelde π_i von η, η_1 konjugiert, je zwei Wechselstrahlen von η, η_1 in dem polaren Felde π_{i1}, in das π_i durch χ_1 transformiert wird. π_i, π_{i1} enthalten den Punkt G als Pol von g und die Involutionen $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ und $G(aa_i, bb_i, \ldots)$. Nun enthält das polare Strahleninzidenzfeld π_J von η, η_1 aber auch den Punkt G als Pol von g, sowie diese Involutionen und ist hierdurch und durch je zwei seiner Wechselstrahlen bestimmt (8.). Folglich sind π_{i1} und π_J identisch, und wir schließen:

Das polare Punktinzidenzfeld π_i zweier korrelativen Felder η, η_1 einer Ebene geht durch die Korrelation χ_1 von η, η_1 ebenso wie durch die zu ihr inverse Korrelation χ_1^{-1} in das polare Strahleninzidenzfeld π_J von η, η_1 über. Zwei gegebene Wechselpunkte des Wechselpunktsystems $[\eta, \eta_1]^2$ bestimmen zwei Paare Wechselstrahlen des Wechselstrahlensystems $[\eta, \eta_1]^{II}$, deren Elemente bzw. mit ihnen inzident sind.

Jedes der kollinearen Felder $\eta_1, \ldots, \eta_m, \ldots$ des Büschels $\eta_1 \eta_{-1}$ bestimmt mit dem zu ihm korrelativen Felde η dasselbe Punktinzidenzfeld π_i (6.). Die Korrelationen $\chi_1, \ldots, \chi_m, \ldots$, welche $\eta_1, \ldots, \eta_m, \ldots$ bzw. auf η beziehen, führen das polare Punktinzidenzfeld π_i bzw. in die ∞^1 polaren Strahleninzidenzfelder der korrelativen Felder $\eta, \eta_1; \ldots; \eta, \eta_m; \ldots$ über. Je zwei zu η invers korrelative Felder des Büschels $\eta_1 \eta_{-1}$ bestimmen mit η dasselbe polare Strahleninzidenzfeld. Das polare Punktinzidenzfeld π_i und diese ∞^1 polaren Strahleninzidenzfelder liegen, da sie die Involutionen $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ und $G(aa_i, bb_i, \ldots)$ enthalten, in derselben Büschelschar polarer Felder. Aus dem Punkte P_{0m} von g, der in einem gegebenen Felde η_m des Büschels $\eta_1 \eta_{-1}$ dem Verbindungsstrahle p_0 der Wechselpunkte P, P' entspricht, werden diese Punkte durch die Wechselstrahlen $P_{0m}P, P_{0m}P'$ des Systems $[\eta \eta_m]^{II}$ projiziert. Die Wechselstrahlen $P_{0m}P, P_{0m}P'$ und die Involutionen $g(AA_i, BB_i, \ldots)$ und $G(aa_i, bb_i, \ldots)$ bestimmen das polare Strahleninzidenzfeld von η, η_m (8.).

Berlin-Halensee, den 20. Dezember 1919.

(Eingegangen am 25. Juli 1920.)

Über das Gleichgewicht von elliptischen Platten.

Von

Hans Happel in Breslau.

§ 1.

In dieser Arbeit behandeln wir das folgende Problem. Gegeben ist eine elliptische Platte, die eine Einzellast im Mittelpunkt trägt, gesucht wird die Verrückung der Mittelebene. Was die Randbedingungen betrifft, so wird zunächst angenommen, daß der Rand eingeklemmt ist, danach wird noch der Fall betrachtet, wo der Rand gestützt ist. Wir nehmen an, daß die Deformationen klein sind im Vergleich zur Plattendicke, so daß nur Verrückungen vorkommen, die senkrecht zur Ruhelage der Mittelebene sind; von den zwei Termen, aus denen die potentielle Energie besteht, kommt dann nur derjenige in Betracht, der proportional ist mit der dritten Potenz der Plattendicke[1]).

Wir betrachten zunächst den Fall, wo die Platte am Rande eingeklemmt ist. Die Ruhelage der Mittelebene der Platte wählen wir als xy-Ebene und zwar soll die x- und y-Achse mit der großen bzw. kleinen Achse der Ellipse zusammenfallen; die die Mittelfläche begrenzt; die positive z-Achse verlaufe nach unten. Die Verschiebung eines beliebigen Punktes der Mittelebene parallel zur z-Achse sei w. Da die Einzellast im Anfangspunkt auflagert, so ist unser Problem mit der folgenden mathematischen Aufgabe identisch. Gesucht wird diejenige Funktion w, die innerhalb der Platte aber mit Ausnahme des Anfangspunktes der Gleichung

$$\Delta\Delta w = 0 \tag{1}$$

genügt und die zwei Randbedingungen:

$$w = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \tag{2}$$

[1]) Siehe G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, Leipzig 1897, 4. Aufl. S. 449–458, oder É. Mathieu, Théorie de l'Élasticité des corps solides, I. partie Paris 1890, S. 171–181.

füllt, wobei n die innere Normale sei. Ist die Einzellast gleich dem ewicht P, so hat w im Anfangspunkt und seiner nächsten Umgebung, le wir mit p bezeichnen, der Gleichung zu genügen[2]):

$$P = \frac{4}{3} K h^3 \left(\frac{1+2\theta}{1+\theta}\right) \iint_p \Delta\Delta w \, dp = q \iint_p \Delta\Delta w \, dp. \tag{3}$$

ier bedeutet $2h$ die Plattendicke, während K und θ die Elastizitäts-onstanten in Kirchhoffscher Bezeichnungsweise sind[3]). Die Bedeutung er zur Abkürzung eingeführten Konstanten q ist ohne weiteres ersichtlich.

Sind xy die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Mittelebene nd setzt man

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

machen wir innerhalb der Platte, aber außerhalb p für w den Absatz

$$w = \frac{P}{8\pi q}\left\{r^2\left(\log r - \frac{1}{2}\right) + F(x,y)\right\}. \tag{4}$$

ier ist die Funktion $F(x,y)$, von der wir voraussetzen, daß sie nebst ren partiellen Derivierten bis zur vierten Ordnung inkl. stetig ist, so zu estimmen, daß innerhalb der ganzen Platte

$$\Delta\Delta F = 0 \tag{5}$$

ird, womit zugleich erreicht ist, daß innerhalb der Platte mit Ausnahme es Anfangspunktes Bedingung (1) erfüllt ist; da, abgesehen von der ge-annten Stelle

$$\Delta\Delta\left\{r^2\left(\log r - \frac{1}{2}\right)\right\} = 0$$

t. Ferner hat noch F wegen (2) den zwei Randbedingungen

$$r^2\left(\log r - \frac{1}{2}\right) + F = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial n}\left\{r^2\left(\log r - \frac{1}{2}\right)\right\} + \frac{\partial F}{\partial n} = 0 \tag{6}$$

genügen. Die Bedingung (3) ist infolge unseres Ansatzes für w von lbst erfüllt[4]), denn nach dem Gaußschen Satz ist, falls s die Randkurve nd n die innere Normale von p bedeutet:

$$\iint_p \Delta\Delta w \, dp = -\int_s \frac{\partial \Delta w}{\partial n} ds.$$

a nun für den Rand von p der Ansatz (4) gilt und die Glieder mit r^2 nd F wegen der Kleinheit von p keinen Beitrag zum Randintegral liefern,

[2]) Siehe z. B. A. Föppl, Technische Mechanik, 5, Leipzig 1907, S. 111.

[3]) Siehe G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, Leipzig 1897, 4. Aufl., 448—458.

[4]) Siehe A. Föppl, Technische Mechanik, 5, Leipzig 1907, S. 111.

so ist, falls man noch p als kreisförmig ansieht und $\partial n = -\partial r$ un $ds = r\,d\varphi$ (φ = Polarwinkel von r) setzt

$$\int\int_p \Delta\Delta w\,dp = \frac{P}{8\pi q}\int_s \frac{\partial \Delta r^2 \log r}{\partial r}\,r\,d\varphi = \frac{P}{q}.$$

Wir haben jetzt nur noch die Funktion F in der angegebenen Weis zu ermitteln. Mit dieser Aufgabe bzw. mit der noch allgemeineren Au gabe die Funktion F so zu bestimmen, daß sie innerhalb einer Ellip der Gleichung (5) genügt und die Randbedingungen

$$F = \varphi \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial n} = \psi$$

erfüllt, wobei φ und ψ gegebene Funktionen der Randpunkte sind, b schäftigt sich É. Mathieu[5]) in einer sehr beachtenswerten Abhandlun Natürlich könnte man versuchen, unser Problem mit Benutzung der G dankengänge von Mathieu zu behandeln. Wir haben aber im folgend einen anderen Weg eingeschlagen, der rascher und einfacher zum Zie führt und außerdem eine zur numerischen Berechnung geeignete Lösu darstellt. Übrigens würde auch, wie wir zum Schluß kurz zeigen, d Mathieusche Problem sich nach unserer Methode ebenfalls in einfach Weise erledigen[6]).

§ 2.

Zur Bestimmung der Funktion F empfiehlt es sich, wie dies au Mathieu tut[7]), statt der rechtwinkligen Koordinaten xy elliptisc Koordinaten α und β einzuführen. Diese sind, falls c die Exzentrizit derjenigen Ellipse ist, die die Mittelfläche begrenzt, definiert durch Gleichungen:

$$(7) \qquad x = c\cos i\beta\cos\alpha, \qquad y = -c\,i\sin i\beta\sin\alpha.$$

Jede Kurve β = konst. stellt bekanntlich wieder eine Ellipse dar, währe jede Kurve α = konst. einer Hyperbel entspricht. Alle diese Ellipsen u Hyperbeln sind konfokal zu der Randellipse, außerdem ist jede Ellip orthogonal zur Schar aller Hyperbeln.

---

[5]) É. Mathieu, Journal de Mathématiques pures et appliquées, (2) 14 (186 S. 378—411 insbes. S. 411.

[6]) A. Haar hat gezeigt (Göttinger Nachrichten. Mathem. phys. Kl. 19 S. 280—287), daß eine Funktion F existiert, die innerhalb eines im wesentlich beliebigen Bereichs der Gleichung $\Delta\Delta F = 0$ genügt, falls am Rande des Berei die Werte von F und $\frac{\partial F}{\partial n}$ beliebig vorgeschrieben sind. Die Eindeutigkeit die Lösung wurde schon vorher von Mathieu (l. c.) bewiesen.

[7]) É. Mathieu. l. c. Journal de Mathématiques etc.

Im folgenden wollen wir wie bisher unter ΔF und $\Delta\Delta F$ die
usdrücke

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}$$

erstehen, in denen also die rechtwinkligen Koordinaten als unabhängige
ariablen auftreten. Führt man die neuen Koordinaten ein, so erhält man

$$\Delta F = \frac{1}{c^2(\sin^2\alpha - \sin^2 i\beta)}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}\right). \tag{8}$$

ieraus folgt: Eine Lösung von $\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}=0$, wie z. B. die Reihe

$$F_1 = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \cos n i\beta \cos n\alpha, \tag{9}$$

der die k_n vorläufig beliebige Konstanten sind, stellt zugleich eine
ösung von $\Delta F = 0$ und also auch von $\Delta\Delta F = 0$ dar. Die Reihe (9)
t also eine Lösung von (5). Die Konstanten k_n sind später so zu be-
immen, daß die Randbedingungen (6) erfüllt sind, da aber zwei Rand-
edingungen vorhanden sind, so haben wir, um beiden zu genügen, noch
ne zweite Lösung von $\Delta\Delta F = 0$ zu ermitteln.

Dazu beachten wir, daß die Gleichung $\Delta\Delta F = 0$ transformiert auf
e neuen Koordinaten die Gestalt hat:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2}=0, \tag{10}$$

obei

$$f = \frac{1}{c^2(\sin^2\alpha - \sin^2 i\beta)}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}\right). \tag{11}$$

ir setzen nun:

$$f = \cos n i\beta \cos n\alpha, \tag{12}$$

odurch der Gleichung (10) genügt wird. Diesen Wert von f führen
ir in (11) ein und bestimmen dann F aus der so erhaltenen Gleichung
ler aus

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} = c^2(\sin^2\alpha - \sin^2 i\beta)\cos n i\beta \cos n\alpha. \tag{13}$$

de Lösung dieser Gleichung ist dann ebenfalls eine Lösung von $\Delta\Delta F$ 0.
tzt man in (13)

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}-\frac{\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 i\beta = \frac{1}{2}-\frac{\cos 2i\beta}{2},$$

geht (13) durch Anwendung der bekannten Formeln

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x-y)+\cos(x+y)\}$$

über in

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} \tag{14}$$

$$=\frac{c^2}{4}[-\cos in\beta\cos(n-2)\alpha+\{\cos i(n-2)\beta+\cos i(n+2)\beta\}\cos n$$
$$-\cos in\beta\cos(n+2)\alpha].$$

Um eine Lösung von (14) zu erhalten, machen wir den folgend Ansatz, in dem die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ Konstanten bedeuten und n ei beliebige positive ganze Zahl sein soll:

$$\mathfrak{A}\cos in\beta\cos(n-2)\alpha+\mathfrak{B}\cos i(n-2)\beta\cos n\alpha+\mathfrak{C}\cos i(n+2)\beta\cos n$$
$$+\mathfrak{D}\cos in\beta\cos(n+2)\alpha.$$

Führt man diesen Ausdruck anstatt F in (14) ein, so wird (14) hierdur befriedigt, falls

$$\mathfrak{A}=\frac{c^2}{4^2(n-1)},\quad \mathfrak{B}=-\frac{c^2}{4^2(n-1)},\quad \mathfrak{C}=\frac{c^2}{4^2(n+1)},\quad \mathfrak{D}=\frac{c^2}{4^2(n+1)}$$

ist. Hat man nun eine Lösung von (14) oder was auf dasselbe hinau kommt von $\Delta\Delta F=0$, so stellt diese Lösung multipliziert mit ein beliebigen Konstanten ebenfalls noch eine Lösung von $\Delta\Delta F=0$ d daher ist der folgende Ausdruck eine Lösung von (5):

$$u_n=A_n\Big\{-\frac{\cos in\beta\cos(n-2)\alpha}{n-1}-\frac{\cos i(n-2)\beta\cos n\alpha}{n-1}+\frac{\cos i(n+2)\beta\cos}{n+1}$$
$$+\frac{\cos in\beta\cos(n+2)\alpha}{n+1}\Big\}. \tag{15}$$

Hier ist A_n eine zunächst ganz beliebige Konstante. Für $n=0$ u $n=1$ hat man statt (15) zu setzen:

$$u_0=A_0\{\cos i2\beta+\cos 2\alpha\},$$
$$u_1=A_1\Big\{\frac{\cos i3\beta\cos\alpha}{2}+\frac{\cos i\beta\cos 3\alpha}{2}\Big\}. \tag{16}$$

Ausführlicher geschrieben hat $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$, das natürlich ebenfalls e Lösung von (5) ist, folgenden Wert:

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=(A_0-A_2)\frac{\cos i2\beta}{1}+(A_1-A_3)\frac{\cos i3\beta}{2}\cos\alpha$$
$$+\Big\{(A_0-A_2)+(A_2-A_4)\frac{\cos i4\beta}{3}\Big\}\cos 2\alpha$$
$$+\Big\{(A_1-A_3)\frac{\cos i\beta}{2}+(A_3-A_5)\frac{\cos i5\beta}{4}\Big\}\cos 3\alpha$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Zur Abkürzung setzen wir

17) $$A_n - A_{n+2} = B_n \quad \text{und} \quad \sum u_n = F_2.$$

Der Ausdruck

18)
$$\begin{aligned} F_2 = {} & B_0 \frac{\cos i\,2\beta}{1} + B_1 \frac{\cos i\,3\beta}{2} \cos\alpha + \left\{ B_0 + B_2 \frac{\cos i\,4\beta}{3} \right\} \cos 2\alpha \\ & + \left\{ B_1 \frac{\cos i\beta}{2} + B_3 \frac{\cos i\,5\beta}{4} \right\} \cos 3\alpha \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left\{ B_{n-2} \frac{\cos i(n-2)\beta}{n-1} + B_n \frac{\cos i(n+2)\beta}{n+1} \right\} \cos n\alpha \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

In dem die B_n ebenso wie die A_n zunächst willkürliche Konstanten sind, stellt dann die zweite Lösung von (5) dar.

Für die Funktion F, die in dem Ausdruck (4) für die gesuchte Verrückung w vorkommt, setzen wir nun (siehe Gl. (9) und (18))

19)
$$\begin{aligned} F = F_1 + F_2 = {} & k_0 + B_0 \frac{\cos i\,2\beta}{1} + \left\{ k_1 \cos i\beta + B_1 \frac{\cos i\,3\beta}{2} \right\} \cos\alpha \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ k_n \cos i\,n\beta + B_{n-2} \frac{\cos i(n-2)\beta}{n-1} + B_n \frac{\cos i(n+2)\beta}{n+1} \right\} \cos n\alpha. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf (19) ergibt sich dann, daß

20)
$$\begin{aligned} w = \frac{P}{8\pi q} \Bigg[& r^2 \left\{ \log r - \frac{1}{2} \right\} + k_0 + B_0 \frac{\cos i\,2\beta}{1} + \left\{ k_1 \cos i\beta + B_1 \frac{\cos i\,3\beta}{2} \right\} \cos\alpha \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ k_n \cos n\,i\beta + B_{n-2} \frac{\cos i(n-2)\beta}{n-1} + B_n \frac{\cos i(n+2)\beta}{n+1} \right\} \cos n\alpha \Bigg] \end{aligned}$$

die Relationen (1) und (3) stets befriedigt, welche Werte man auch den Konstanten k_n und B_n beilegt. Wir haben also jetzt nur noch diese Konstanten so zu bestimmen, daß die zwei Randbedingungen (2) erfüllt sind. Außerdem ist noch die Konvergenz unserer Reihen zu beweisen.

§ 3.

Zur Bestimmung der Konstanten k_n und B_n führen wir in dem in (20) vorkommenden Ausdruck $r^2\{\log r - \frac{1}{2}\}$ ebenfalls die elliptischen Koordinaten ein und zwar wollen wir ihn, als Funktion von α aufgefaßt, ebenso wie es mit F geschah, in eine Fouriersche Reihe entwickeln; diese enthält, da die Einzellast im Mittelpunkt auflagert und also $r^2 = x^2 + y^2$ ist, nur Kosinusglieder, deren Koeffizienten natürlich noch Funktionen von β sind. Setzt man in $r^2 = x^2 + y^2$ die Werte (7) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} r^2 &= c^2 (\cos^2 i\beta \cos^2\alpha - \sin^2 i\beta \sin^2\alpha) \\ &= \frac{c^2}{4} [(1 + \cos i\,2\beta)(1 + \cos 2\alpha) - (1 - \cos i\,2\beta)(1 - \cos 2\alpha)] \end{aligned}$$

oder

$$(21)\quad r^2 = \frac{c^2}{2}(\cos i2\beta + \cos 2\alpha) = \frac{c^2 e^{2\beta}}{4}(1 + e^{-4\beta} + 2e^{-2\beta}\cos 2\alpha).$$

Hierdurch ist bereits r^2 durch eine Fouriersche Reihe dargestellt.

Um die Fouriersche Reihe für $\log r$ bzw. $r^2 \log r$ zu erhalten, haben wir zunächst (21) noch etwas umzuformen. Es ist nach (21)

$$r^2 = \frac{c^2}{4}(e^{2\beta} + e^{-2\beta} + e^{i2\alpha} + e^{-i2\alpha})$$

oder

$$r^2 = \frac{c^2 e^{2\beta}}{4}(1 + ie^{i\alpha}e^{-\beta})(1 - ie^{i\alpha}e^{-\beta})(1 + ie^{-i\alpha}e^{-\beta})(1 - ie^{-i\alpha}e^{-\beta}).$$

Also hat man

$$\log r = \log\left(\frac{ce^{\beta}}{2}\right) + \frac{1}{2}\log(1 + ie^{i\alpha}e^{-\beta}) + \frac{1}{2}\log(1 - ie^{i\alpha}e^{-\beta})$$
$$+ \frac{1}{2}\log(1 + ie^{-i\alpha}e^{-\beta}) + \frac{1}{2}\log(1 - ie^{-i\alpha}e^{-\beta})$$

Für die Logarithmen der in Klammern stehenden Größen dürfen wir ihre Reihen einführen; denn diese Reihen konvergieren absolut, falls

$$|ie^{i\alpha}e^{-\beta}| < 1 \quad \text{und} \quad |ie^{-i\alpha}e^{-\beta}| < 1.$$

Der kleinste in Betracht kommende Wert von β, nämlich $\beta = 0$, entspricht derjenigen der konfokalen Ellipsen, die auf das Stück der x-Achse, das zwischen den zwei Brennpunkten liegt, zusammengeschrumpft ist. Mithin sind für $\beta > 0$ die zwei letzten Ungleichungen stets erfüllt. Führt man nun die Reihen ein, so ergibt sich nach leichter Rechnung

$$(22)\quad \log r = \log\left(\frac{ce^{\beta}}{2}\right) + 2\frac{e^{-2\beta}\cos 2\alpha}{2} - 2\frac{e^{-4\beta}\cos 4\alpha}{4}$$
$$+ 2\frac{e^{-6\beta}\cos 6\alpha}{6} - \ldots - (-1)^n 2\frac{e^{-2n\beta}\cos 2n\alpha}{2n} \ldots$$

und diese Reihe konvergiert absolut für alle α und β, falls nur $\beta > 0$ ist, d. h. die Konvergenz findet statt für alle Punkte der Mittelfläche, die außerhalb des geradlinigen Stücks zwischen den zwei Brennpunkten liegen.

Die Fouriersche Reihe für $r^2\{\log r - \frac{1}{2}\}$ ergibt sich nun am einfachsten, wenn wir in diesem Ausdruck für r^2 und $\log r$ die Reihen (21) und (22) einsetzen und dann noch die Produkte der Kosinusglieder mittels der Formel $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$ durch eine Summe solcher Glieder ersetzen. Man findet so:

$$r^2\left\{\log r-\frac{1}{2}\right\}=\frac{c^2e^{2\beta}}{4}\left\{(1+e^{-4\beta})\log\left(\frac{ce^{\beta}}{2}\right)-\frac{1}{2}+\frac{e^{-4\beta}}{2}\right.$$
$$+\cos 2\alpha\left[2e^{-2\beta}\log\left(\frac{ce^{\beta}}{2}\right)+\frac{1}{2}e^{-6\beta}\right]$$
$$+\cos 4\alpha\left[\frac{e^{-4\beta}}{2\cdot 1}-\frac{e^{-8\beta}}{2\cdot 3}\right]$$
(23)
$$+\cos 6\alpha\left[-\frac{e^{-6\beta}}{3\cdot 2}+\frac{e^{-10\beta}}{3\cdot 4}\right]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left.+\cos 2n\alpha\left[(-1)^n\frac{e^{-2n\beta}}{n(n-1)}+(-1)^{n+1}\frac{e^{-(2n+4)\beta}}{n(n+1)}\right]\right.$$
$$\left.+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right\}$$

Bei der Befriedigung der Grenzbedingungen brauchen wir noch den Wert vom Differentialquotienten von $r^2\{\log r-\frac{1}{2}\}$ nach der Normalen oder, was auf dasselbe herauskommt, den Wert von

(24) $$\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{r^2\left(\log r-\frac{1}{2}\right)\right\}=2r\log r\frac{\partial r}{\partial\beta}.$$

Nach (21) ist

$$2r\frac{\partial r}{\partial\beta}=\frac{c^2}{2}(e^{2\beta}-e^{-2\beta}).$$

Setzt man diesen Wert und den in (22) für $\log r$ erhaltenen Ausdruck in (24) ein, so folgt:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{r^2\left(\log r-\frac{1}{2}\right)\right\}=c^2\left\{\left(\frac{e^{2\beta}-e^{-2\beta}}{2}\right)\log\left(\frac{ce^{\beta}}{2}\right)+\left(\frac{1-e^{-4\beta}}{2}\right)\cos 2\alpha\right.$$
$$-\left(\frac{e^{-2\beta}-e^{-6\beta}}{4}\right)\cos 4\alpha+\left(\frac{e^{-4\beta}-e^{-8\beta}}{6}\right)\cos 6\alpha$$
(25)
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left.-(-1)^n\left(\frac{e^{-(2n-2)\beta}-e^{-(2n+2)\beta}}{2n}\right)\cos 2n\alpha\ldots\right\}.$$

Auch die Reihen (23) und (25) konvergieren absolut für alle α und β, falls nur $\beta>0$ ist.

§ 4.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir über zur Befriedigung der Grenzbedingungen (6) oder, was auf dasselbe hinauskommt, zur Bestimmung der Konstanten k_n und B_n. Bildet man die zwei Gleichungen (6), wobei für $r^2(\log r-\frac{1}{2})$ und für den Differentialquotienten dieses Ausdrucks nach der Normalen n bzw. nach β die in (23) und (25) erhaltenen Werte einzusetzen sind und für F der Wert aus (19), so ergibt sich, falls wir noch festsetzen, daß der Randellipse der Wert $\beta=b$ entspricht:

$$k_0 + B_0 \frac{\cos i\,2b}{1} + \left\{ k_1 \cos ib + B_1 \frac{\cos i\,3b}{2} \right\} \cos\alpha$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ k_n \cos inb + B_{n-2} \frac{\cos i(n-2)b}{n-1} + B_n \frac{\cos i(n+2)b}{n+1} \right\} \cos n\alpha$$

$$= -\frac{c^2 e^{2b}}{4} \left\{ (1+e^{-4b}) \log\left(\frac{ce^b}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{e^{-4b}}{2} + \left[2e^{-2b} \log\left(\frac{ce^b}{2}\right) + \frac{e^{-6b}}{2} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{e^{-2nb}}{n(n-1)} - \frac{e^{-(2n+4)b}}{n(n+1)} \right] \cos 2n\alpha \right\}, \right.$$

(26)

$$-B_0 \frac{2i \sin i\,2b}{1} - \left\{ k_1 i \sin ib + B_1 3i \frac{\sin i\,3b}{2} \right\} \cos\alpha$$

$$- \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ k_n n i \sin inb + B_{n-2} \frac{(n-2) i \sin i(n-2)b}{n-1} + B_n \frac{(n+2) i \sin i(n+2)b}{n+1} \right\}$$

$$= -c^2 \left\{ \left(\frac{e^{2b} - e^{-2b}}{2} \right) \log\left(\frac{ce^b}{2}\right) + \left(\frac{1-e^{-4b}}{2} \right) \cos 2\alpha \right.$$

$$\left. - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(e^{-(2n-2)b} - e^{-(2n+2)b}\right)}{2n} \cos 2n\alpha \right\}.$$

In beiden Gleichungen müssen alle Glieder mit $\cos 0\alpha$ für sich verschwinden, ebenso alle Glieder mit $\cos\alpha$ usw.; hierdurch erhalten wir zweimal unendlich viele Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten k_n und B_n.

Setzt man alle Glieder mit $\cos\alpha$ gleich null, so ergibt sich, da rechts beidemal keine solchen Glieder vorkommen,

$$k_1 = 0, \qquad B_1 = 0.$$

Hieraus und aus dem Umstand, daß rechts auch keine Terme mit $\cos 3\alpha$, $\cos 5\alpha, \ldots$ auftreten, folgt allgemein:

(27) $$k_{2n-1} = 0 \quad \text{und} \quad B_{2n-1} = 0 \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Setzt man die Glieder mit $\cos 0\alpha$ gleich null, so findet man, da

$$i \sin i\,2b = -\left(\frac{e^{2b} - e^{-2b}}{2} \right) \quad \text{und} \quad \cos i\,2b = \frac{e^{2b} + e^{-2b}}{2},$$

(28) $$k_0 = \frac{c^2}{8}(e^{2b} - e^{-2b}), \qquad B_0 = -\frac{c^2}{2} \log\left(\frac{ce^b}{2}\right).$$

Weiter ergibt sich für k_2 und B_2:

(29)
$$k_2 \{3i \sin i\,2b + i \sin i\,6b\} = -\frac{c^2}{4} \{e^{4b} + e^{-4b} - 2\},$$

$$\frac{1}{3} B_2 \{3i \sin i\,2b + i \sin i\,6b\} = \frac{c^2}{4} \left\{ e^{2b} - \frac{1}{2} e^{-2b} - \frac{1}{2} e^{-6b} \right\}.$$

Alle weiteren k_{2n} und B_{2n} berechnen sich aus den folgenden zwei Gleichungen:

$$k_{2n}\cos i\,2nb+B_{2n}\frac{\cos i(2n+2)b}{2n+1}=-B_{2n-2}\frac{\cos i(2n-2)b}{2n-1}$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{c^2}{4n}\left[\frac{e^{-(2n-2)b}}{n-1}-\frac{e^{-(2n+2)b}}{n+1}\right],$$
$$-k_{2n}i\,2n\sin i\,2nb-B_{2n}\frac{i(2n+2)\sin i(2n+2)b}{2n+1}=B_{2n-2}\frac{i(2n-2)\sin i(2n-2)}{2n-1}$$
$$+(-1)^n\frac{c^2}{2n}[e^{-(2n-2)b}-e^{-(2n+2)b}].$$

Hieraus folgt, falls man in den mit c^2 multiplizierten Gliedern

$$\sin i(2n+2)b=\frac{e^{(2n+2)b}+e^{-(2n+2)b}}{2},\quad i\sin i(2n+2)b=-\left(\frac{e^{(2n+2)b}-e^{-(2n+2)b}}{2}\right)\text{ usw.}$$

setzt.

$$1)\quad k_{2n}\{-(2n+1)i\sin i\,2b-i\sin i(4n+2)b\}$$
$$=\frac{B_{2n-2}}{2n-1}\{2ni\sin i\,4b+2i\sin i\,4nb\}+(-1)^{n+1}\frac{c^2}{2n}\left\{\frac{e^{4b}n-n+1-e^{-4nb}}{n-1}\right\},$$

$$(32)\quad \frac{B_{2n}}{2n+1}\{(2n+1)i\sin i\,2b+i\sin i(4n+2)b\}$$
$$=\frac{B_{2n-2}}{2n-1}\{(2n-1)i\sin i\,2b+i\sin i(4n-2)b\}$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{c^2}{2}\left\{\frac{e^{2b}}{n-1}\left(1-\frac{1+e^{-4nb}}{2n}\right)-\frac{e^{-2b}}{n+1}\left(1+\frac{1+e^{-4nb}}{2n}\right)\right\}$$
$$(n=2,3,4,\ldots).$$

Nachdem k_0, B_0; k_2, B_2 ermittelt sind, ergeben sich aus diesen zwei Gleichungen zunächst k_4, B_4, darauf k_6, B_6 usw.

§ 5.

Wir haben nun noch die Konvergenz unserer Entwicklungen nachzuweisen. Von den Reihen für $r^2\left(\log r-\frac{1}{2}\right)$ und $\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{r^2\left(\log r-\frac{1}{2}\right)\right\}$ ist dies bereits geschehen. Wir haben die Gültigkeit beider Entwicklungen erkannt unter der einzigen Voraussetzung, daß $\beta>0$ ist. Wir haben daher jetzt nur noch von der Reihe (19) die Konvergenz sowie die viermalige gliedweise Differentiation zu beweisen. Dazu ist es nötig, die durch (31) und (32) gelieferten Werte für k_{2n} und B_{2n} abzuschätzen.

Dies soll zunächst für B_{2n} geschehen. Hierzu müssen wir den Ausdruck für B_{2n} umformen, und zwar wollen wir die rechts vorkommende Größe B_{2n-2} eliminieren. Zu diesem Zweck beachten wir, daß in (32) der Faktor von B_{2n-2} aus dem Faktor von B_{2n} dadurch hervorgeht, daß man n durch $n-1$ ersetzt. Den Faktor von B_{2n} bezeichnen wir mit f_{2n},

also

$$f_{2n} = \frac{(2n+1)\,i\sin i\,2b + i\sin i\,(4n+2)\,b}{2n+1}. \tag{33}$$

Der Faktor von B_{2n-2} ist alsdann mit f_{2n-2} zu bezeichnen. Wir bilden nun die Gleichung (32) mit Benutzung dieser Abkürzung nacheinander für den Fall, wo n die folgenden Werte hat: $n, n-1, \ldots, 3, 2$. Wir erhalten so:

$$B_{2n} f_{2n} = B_{2n-2} f_{2n-2} + (-1)^{n+1} \frac{c^2}{2} \left\{ \frac{e^{2b}}{n-1}\left(1 - \frac{1+e^{-4nb}}{2n}\right) - \frac{e^{-2b}}{n+1}\left(1 + \frac{1+e^{-4n}}{2n}\right.\right.$$

$$B_{2n-2} f_{2n-2} = B_{2n-4} f_{2n-4} + (-1)^{n} \frac{c^2}{2} \left\{ \frac{e^{2b}}{n-2}\left(1 - \frac{1+e^{-4(n-1)b}}{2(n-1)}\right) - \frac{e^{-2b}}{n}\left(1 + \frac{1+e^{-4(n}}{2(n-}\right.\right.$$

. . . . . .

$$B_4 f_4 = B_2 f_2 + (-1)^3 \frac{c^2}{2} \left\{ \frac{c^{2b}}{1}\left(1 - \frac{1+e^{-8b}}{4}\right) - \frac{e^{-2b}}{3}\left(1 + \frac{1+e^{-8b}}{4}\right)\right\}.$$

Durch Addition folgt:

$$B_{2n} f_{2n} = B_2 f_2 + \frac{c^2}{2} e^{2b} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k-1}\left(1 - \frac{1+e^{-4kb}}{2k}\right) - \frac{c^2}{2} e^{-2b} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\left(1 + \frac{1+e^{-4kb}}{2k}\right), \tag{34}$$

womit die gewünschte Elimination von B_{2n-2} bereits bewerkstelligt ist.

Die Formel (34) dient zur Abschätzung der B_{2n}. Zunächst wollen wir Grenzen für die in (34) rechts auftretende Reihe

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k-1}\left(1 - \frac{1}{2k}\right) = -\frac{1}{1}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{k-1}\left(1 - \frac{1}{2k}\right) + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \tag{35}$$

ermitteln. Dies ist eine alternierende Reihe, bei der die aufeinanderfolgenden Glieder dem Betrag nach beständig kleiner werden; denn der Quotient aus dem allgemeinen Gliede $\frac{(-1)^{k+1}}{k-1}\left(1 - \frac{1}{2k}\right)$ und dem ihm vorangehenden ist dem Betrag nach gleich:

$$\frac{(2k-1)(k-2)(2k-2)}{(k-1)\,2k(2k-3)} = \frac{(2k-1)(k-2)}{k(2k-3)} = 1 - \frac{2k-2}{k(2k-3)}.$$

Betrachtet man von der Reihe das zweite Glied und das ihm vorangehende, so ist in dem eben gebildeten Quotienten $k = 3$ zu setzen, während sonst $k > 3$ zu nehmen ist, mithin ist der Quotient stets < 1. In derselben Weise, wie man die Konvergenz einer alternierenden Reihe, deren Glieder dem Betrage nach beständig kleiner werden, nachweist, er-

gibt sich, daß die Summe der Reihe zwischen Null und dem Wert des ersten Gliedes liegt. Also:

$$0 > \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k-1}\left(1-\frac{1}{2k}\right) > -\frac{1}{1}\left(1-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4},$$

oder falls Θ_1 eine geeignet gewählte Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k-1}\left(1-\frac{1}{2k}\right) = -\frac{3}{4}\Theta_1. \tag{36}$$

Auch die in (34) enthaltene Reihe $-\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\left(1+\frac{1}{2k}\right)$ ist alternierend und ihre Glieder werden dem Betrag nach beständig kleiner. Daher ist, falls wieder Θ_2 eine geeignet gewählte Zahl zwischen 0 und 1 ist:

$$-\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\left(1+\frac{1}{2k}\right) = \frac{5}{12}\Theta_2. \tag{37}$$

Endlich sind auch die in (34) ebenfalls vorkommenden Reihen $-\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k+1} e^{-4kb}}{(k-1)2k}$ und $-\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k+1} e^{-4kb}}{(k+1)2k}$ alternierende mit dem Betrag nach beständig kleiner werdenden Gliedern. Daher ist, wenn wieder Θ_3 und Θ_4 geeignet gewählte Zahlen zwischen 0 und 1 bedeuten:

$$-\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k+1} e^{-4kb}}{(k-1)2k} = \Theta_3 \frac{e^{-8b}}{4}, \tag{38}$$

$$-\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k+1} e^{-4kb}}{(k+1)2k} = \Theta_4 \frac{e^{-8b}}{12}. \tag{39}$$

Setzt man jetzt für die in (34) rechts auftretenden Reihen (36) bis (38) ihre eben ermittelten Werte ein, so ergibt sich:

$$B_{3n} f_{2n} = B_2 f_2 + \frac{c^2}{2} e^{2b}\left\{-\frac{3}{4}\Theta_1 + \frac{\Theta_3}{4} e^{-8b}\right\} + \frac{c^2}{2} e^{-2b}\left\{\frac{5}{12}\Theta_2 + \frac{\Theta_4}{12} e^{-8b}\right\}.$$

Da $e^{-8b} < 1$ und alle Θ_i der Bedingung $\Theta < \Theta_i < 1$ genügen, so ist:

$$\left|-\frac{3}{4}\Theta_1 + \frac{\Theta_3}{4} e^{-8b}\right| < \frac{3}{4}, \qquad \left|\frac{5}{12}\Theta_2 + \frac{\Theta_4}{12} e^{-8b}\right| < \frac{1}{2}.$$

Also hat man:

$$|B_{3n} f_{2n}| < |B_2 f_2| + \frac{3}{8} c^2 e^{2b} + \frac{c^2 e^{-2b}}{4}. \tag{40}$$

Nach (33) ist ferner:

$$|f_{2n}| > \frac{-i \sin i(4n+2)b}{2n+1} \tag{41}$$

Zur Abkürzung bezeichnen wir den in (40) rechts stehenden von n unabhängigen Ausdruck mit K, also

$$K = |B_2 f_2| + \frac{3}{8} c^2 e^{2b} + \frac{c^2}{4} e^{-2b}. \tag{42}$$

Wegen (41) ist dann:

$$|B_{2n}| < \frac{K(2n+1)}{-i \sin i(4n+2)b}.$$

Für hinreichend große n ist $-i \sin i(4n+2)b = \frac{e^{(4n+2)b}}{2}$ und demgemäß

$$|B_{2n}| < \frac{K2(2n+1)}{e^{(4n+2)b}}, \tag{43}$$

wobei, wie erwähnt, K eine endliche und von n unabhängige positive Zahl ist.

Wir haben jetzt noch k_{2n} abzuschätzen. Man hat nach (31)

$$|k_{2n}| \leqq \frac{|B_{2n-2}|}{2n-1} \left| \frac{2ni \sin i4b + 2i \sin i4nb}{-(2n+1) i \sin i2b - i \sin i(4n+2)b} \right| + \frac{c^2}{2n(n-1)} \left| \frac{e^{4b} n - n + 1 - e^{-4nb}}{-(2n+1) i \sin i2b - i \sin i(4n+2)b} \right|. \tag{44}$$

Nach (43) ist für hinreichend große n.

$$|B_{2n-2}| < \frac{K2(2n-1)}{e^{(4n-2)b}}. \tag{45}$$

Für den Nenner $-(2n+1)i \sin i2b - i \sin i(4n+2)b$ ergibt sich:

$$|-(2n+1)i \sin i2b - i \sin i(4n+2)b| > -i \sin i(4n+2)b$$

und folglich, wenigstens für hinreichend große n:

$$|-(2n+1)i \sin i2b - i \sin i(4n+2)b| > \frac{1}{2} e^{(4n+2)b} \tag{46}$$

Unter der gleichen Voraussetzung kann man ferner setzen:

$$|2ni \sin i4b + 2i \sin i4nb| = |2i \sin i4nb| = e^{4nb} \tag{47}$$

und

$$e^{4b} n - n + 1 - e^{-4nb} = (e^{4b} - 1) n. \tag{48}$$

Mithin ist, falls n genügend groß ist, zufolge von (44) bis (48)

$$|k_{2n}| < \frac{K4}{e^{4nb}} + \frac{c^2 (e^{4b} - 1)}{(n-1) e^{(4n+2)b}}.$$

Für hinreichend große n läßt sich daher eine konstante und von n unabhängige positive Zahl M angeben, so daß

$$|k_{2n}| < \frac{M}{e^{4nb}}. \tag{49}$$

Durch die Ungleichungen (43) und (49) sind B_{2n} und k_{2n} abgeschätzt

§ 6.

Wir gehen jetzt über zum Nachweis der Konvergenz der durch (19) largestellten Reihe für F; außerdem ist noch die Berechtigung der 4 maligen gliedweisen Differentiation dieser Entwicklung zu zeigen. Mit Rücksicht auf die in (43) und (49) erhaltenen Grenzen für B_{2n} und k_{2n} rgibt sich, daß die Glieder der Reihe (19) für F dem Betrag nach chließlich kleiner werden als diejenigen der Reihe:

$$50) \quad \sum_n \left[\frac{M}{e^{4nb}} \cos i\,2n\beta + 2K \left\{ \frac{\cos i\,(2n-2)\beta}{e^{(4n-2)b}} + \frac{\cos i\,(2n+2)\beta}{e^{(4n+2)b}} \right\} \right] |\cos 2n\alpha| .$$

Die Konvergenz dieser Reihe, deren sämtliche Glieder positiv sind, ist hne weiteres ersichtlich, falls $0 \leqq \beta \leqq b$ und daher konvergiert auch die Reihe F absolut für alle α und β innerhalb der Platte und auf dem Rande. Um die Randbedingungen in Erfüllung zu bringen, hatten wir die Reihe F gliedweise nach β differentiiert und dann $\beta = b$ gesetzt; auch dies ist estattet, da das gleiche bei der Reihe (50) erlaubt ist.

Wir haben nun noch zu zeigen, daß auch die bei der Bildung von $\Delta\Delta F$ in Betracht kommenden gliedweisen Differentiationen gestattet sind. Für den einen Teil von F, nämlich von der im vorangehenden mit F_1 ezeichneten Reihe (9) ist dies sofort ersichtlich. Denn man hat, falls nan wieder wie früher unter ΔF_1 und $\Delta\Delta F_1$ die von den rechtwinkligen Koordinaten abhängigen bekannten Ausdrücke versteht:

$$51) \quad \Delta F_1 = \frac{2}{c^2(\cos 2i\beta - \cos 2\alpha)} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \beta^2} \right).$$

Da nun wegen (49) die Glieder von F_1 schließlich dem Betrag nach leiner werden als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$\sum_n \frac{M}{e^{4nb}} \cos 2ni\beta\, |\cos 2n\alpha| ,$$

o erkennt man ohne weiteres, daß bei F_1 die in (51) vorkommenden Differentiationen gliedweise vollzogen werden dürfen, und zwar für alle Punkte im Inneren der Platte und auf dem Rande, nur die zwei Brennpunkte $\beta = 0$, $\alpha = 0$ und $\beta = 0$, $\alpha = \pi$ sind auszunehmen, da für beide der Nenner von (51) verschwindet. Da nun bereits $\frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial \beta^2} = 0$ ist, o sind selbstverständlich auch die gliedweisen Differentiationen von $\Delta\Delta F_1$ estattet und außerdem ist $\Delta\Delta F_1 = 0$.

Wir haben nun noch analoge Betrachtungen für F_2 anzustellen. Man hat nach (18)

$$(52)\quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial \beta^2}=B_0 2^2(\cos i\,2\beta-\cos 2\alpha)$$
$$+\frac{B_2}{3}(\{4^2-2^2\}\cos i\,4\beta\cos 2\alpha-\{4^2-2^2\}\cos i\,2\beta\cos 4\alpha)$$
$$+\frac{B_4}{5}(\{6^2-4^2\}\cos i\,6\beta\cos 4\alpha-\{6^2-4^2\}\cos i\,4\beta\cos 6\alpha)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wegen (43) ist die 2 malige gliedweise Differentiation von F_2 nach α und auch nach β gestattet und beide so erhaltenen Reihen konvergieren absolut innerhalb der ganzen Platte und auf dem Rande. Setzt man zur Abkürzung:

$$(53)\qquad N=\cos i\,2\beta-\cos 2\alpha,$$

so geht wegen $\cos i\,4\beta=2\cos^2 i\,2\beta-1$ und $\cos 4\alpha=2\cos^2 2\alpha-1$ der Faktor von $\frac{B_2}{3}$ über in:

$$3\cdot 4(2\cos 2\alpha\cos i\,2\beta+1)N.$$

Für den Faktor von $\frac{B_4}{5}$ findet man analog wegen $\cos i\,6\beta=2\cos i\,4\beta\cos i\,2\beta-\cos i\,2\beta$ und $\cos 6\alpha=2\cos 4\alpha\cos 2\alpha-\cos 2\alpha$

$$5\cdot 4(2\cos 4\alpha\cos i\,4\beta\,N+\cos i\,4\beta\cos 2\alpha-\cos i\,2\beta\cos 4\alpha).$$

Der hier innerhalb der Klammer vorkommende Ausdruck $\cos i\,4\beta\cos 2\alpha-\cos i\,2\beta\cos 4\alpha$ ist, abgesehen von einem Zahlenfaktor, identisch mit dem Faktor von $\frac{B_2}{3}$ in (52) und wird ebenso wie dieser umgeformt. Verfährt man in derselben Weise mit den übrigen Termen von (52), so ergibt sich schließlich:

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial \beta^2}=B_0 4N$$
$$+B_2 4(2\cos 2\alpha\cos i\,2\beta+1)N$$
$$+B_4 4(2\cos 4\alpha\cos i\,4\beta+2\cos 2\alpha\cos i\,2\beta+1)N$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und

$$(54)\quad \Delta F_2=\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}=\frac{2}{c^2N}\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial \alpha^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial \beta^2}\right)$$
$$=\frac{8}{c^2}[B_0+B_2(2\cos 2\alpha\cos i\,2\beta+1)+\ldots$$
$$+B_{2n}(2\cos 2n\alpha\cos i\,2n\beta+2\cos(2n-2)\alpha\cos i(2n-2)\beta+\ldots$$
$$+2\cos 2\alpha\cos i\,2\beta+1)$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$$

uch diese Reihe konvergiert, abgesehen von den zwei Brennpunkten, nerhalb der ganzen Platte und auf dem Rande, nud zwar gilt dies uch dann noch, wenn man jedes der Produkte $\cos 2\alpha \cos i 2\beta$, $\cos 4\alpha \cos i 4\beta, \ldots$ überall durch seinen Betrag ersetzt. Endlich sieht man uch sofort ein, daß man $\Delta\Delta F_2$ aus (54) mittels gliedweiser Differentiaionen gewinnt, die wieder innerhalb des genannten Bereichs gestattet sind. us (54) ergibt sich wieder das bereits früher erhaltene Resultat, daß $\Delta F_2 = 0$ ist, da jedes Glied von der Form $\cos k\alpha \cos ik\beta$ $(k = 2, 4, 6, \ldots)$ er Gleichung $\Delta w = 0$ genügt. Damit ist der Konvergenzbeweis erledigt. ie numerische Ermittlung von w geschieht selbstverständlich direkt nach er Formel (20), wobei man $r^2(\log r - \frac{1}{2})$ ohne Benützung der zugehörigen eihe berechnet.

§ 7.

Wir haben nun noch zu zeigen, daß in dem Fall, wo die Exzentrizität nserer elliptischen Platte in Null übergeht, alsdann die erhaltene Lösung dentisch ist mit der Deformation einer kreisförmigen am Rande eingelemmten Platte, die mit einer Einzellast im Mittelpunkt beschwert ist.

Aus der Gleichung der Randellipse nämlich

$$\frac{x^2}{c^2\cos^2 ib} + \frac{y^2}{c^2 i^2 \sin^2 ib} = 1$$

olgt, daß ihre Halbachsen A und B dargestellt sind durch

$$A = c\cos ib = c\left(\frac{e^b + e^{-b}}{2}\right),$$

$$B = -ci\sin ib = c\left(\frac{e^b - e^{-b}}{2}\right).$$

eht die Ellipse über in einen Kreis, wird also $A = B$, so ist ce^{-b} zu ernachlässigen gegen ce^b, und für den Radius A_0 des Kreises erhält man:

55) $$A_0 = \frac{ce^b}{2}.$$

ine beliebige der bereits in § 1 erwähnten Ellipsen, die konfokal zur andellipse sind, wird dargestellt durch:

$$\frac{x^2}{c^2\cos^2 i\beta} + \frac{y^2}{c^2 i^2 \sin^2 i\beta} = 1.$$

leichzeitig mit der Randellipse geht auch diese soeben betrachtete Ellipse ber in einen Kreis, dessen Radius wir mit R bezeichnen wollen. Für R rgibt sich

56) $$R = \frac{ce^\beta}{2}.$$

Im Ausdruck (20) für die Deformation w treten auf die Glieder:

$$k_0, \quad B_0 \cos i\,2\beta, \quad k_2 \cos i\,2\beta, \quad B_0, \quad B_2 \cos i\,4\beta, \quad \ldots,$$

während alle k_n und B_n mit ungeradem n verschwinden. Aus den in (28) für k_0 und B_0 erhaltenen Werten findet man, daß im Fall des Kreises

$$k_0 = \frac{c^2 e^{2b}}{8} = \frac{A_0^2}{2}, \tag{57}$$
$$B_0 \cos i\,2\beta = -R^2 \log A_0.$$

zu setzen ist. Alle weiteren Glieder aber sind, wie aus ihren in (29) (31) und (32) angegebenen Werten folgt, zu vernachlässigen.

Das in (20) vorkommende r ist identisch mit der soeben mit R bezeichneten Größe. Mithin geht wegen (55), (56) und (57) der Ausdruck (20) für die Deformation w im Fall der kreisförmigen Platte über in:

$$w = \frac{P}{8\pi q}\left[R^2 \log\left(\frac{R}{A_0}\right) + \frac{1}{2}(A_0^2 - R^2)\right]. \tag{58}$$

Dies stimmt tatsächlich überein mit der wohlbekannten Lösung für die kreisförmige Platte[8]).

§ 8.

Wir wollen nun noch den Fall betrachten, wo eine elliptische mit dem Gewicht P im Mittelpunkt beschwerte Platte am Rande gestützt ist. Gesucht wird die Deformation der Mittelfläche, die wieder klein im Vergleich zur Plattendicke sein soll. Das Koordinatensystem und die Bezeichnungen wählen wir wieder so wie früher. Das gestellte Problem ist identisch mit der folgenden mathematischen Aufgabe[9]): Gesucht wird diejenige Funktion w, die innerhalb der Platte, aber mit Ausnahme des Mittelpunktes der Gleichung

$$\Delta\Delta w = 0 \tag{59}$$

genügt und die folgenden zwei Randbedingungen erfüllt:

$$w = 0,$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\varphi + \frac{\Theta}{1+\Theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{60}$$

Hier ist φ der Winkel zwischen der x-Achse und der Normalen n der Randellipse; dabei ist es offenbar gleichgültig, ob wir unter n die äußere

[8]) Siehe z. B. Love, Lehrbuch der Elastizität, deutsch von A. Timpe, Leipzig und Berlin 1907, S. 561.

[9]) Siehe z. B. G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, 4. Aufl., Leipzig 1897, S. 448 u. f.

ler innere Normale verstehen. Im Mittelpunkt und seiner nächsten mgebung p hat w wieder die Bedingung (3), nämlich

1) $$P = \frac{4}{3} K h^3 \frac{1+2\Theta}{1+\Theta} \iint_p \Delta\Delta w \, dp = q \iint_p \Delta\Delta w \, dp.$$

befriedigen.

Zur Lösung verwenden wir wieder den Ansatz (20), nämlich

$$w = \frac{P}{8\pi q}\Big[r^2\Big(\log r - \frac{1}{2}\Big) + k_0 + B_0 \frac{\cos i\,2\beta}{1} + \Big\{k_1 \cos i\beta + B_1 \frac{\cos i\,3\beta}{2}\Big\}\cos\alpha$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}\Big\{k_n \cos n i\beta + B_{n-2}\frac{\cos i(n-2)\beta}{n-1} + B_n \frac{\cos i(n+2)\beta}{n+1}\Big\}\cos n\alpha\Big].$$

ierdurch wird der Gleichung (59) und der Bedingung (61) genügt. Man t also jetzt nur noch die Konstanten k_0, B_0, k_1, B_1, ... so zu bestimmen, daß auch die zwei Grenzbedingungen (60) erfüllt sind.

§ 9.

Zur Befriedigung der Grenzbedingungen haben wir zunächst in der eiten Gleichung (60) die elliptischen Koordinaten α, β einzuführen. ier treten die Differentialquotienten $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$ auf. Man hat n für den Rand, wo $w = 0$ ist und demgemäß auch $\frac{\partial w}{\partial \alpha}$ und $\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}$ verhwinden:

$$\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)_{\beta=b} = \Big\{\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\Big(\frac{\partial \beta}{\partial x}\Big)^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial \beta\,\partial \alpha}\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \beta}\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}\Big\}_{\beta=b},$$

3) $$\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\Big)_{\beta=b} = \Big\{\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta\,\partial \alpha}\Big(\frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial y}\Big) + \frac{\partial w}{\partial \beta}\frac{\partial^2 \beta}{\partial x\,\partial y}\Big\}_{\beta=b},$$

$$\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)_{\beta=b} = \Big\{\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\Big(\frac{\partial \beta}{\partial y}\Big)^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial \beta\,\partial \alpha}\frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \beta}\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}\Big\}_{\beta=b}.$$

mtliche Differentialquotienten sind hier ebenso wie in (60) für den and, also $\beta = b$, zu bilden.

Um die hier vorkommenden Differentialquotienten $\frac{\partial \beta}{\partial x}$, $\frac{\partial \beta}{\partial y}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \beta}{\partial x\,\partial y}$ auszudrücken durch α und β, gehen wir aus von den aus) folgenden Relationen:

4) $$\frac{x^2}{c^2\cos^2 i\beta} - \frac{y^2}{c^2\sin^2 i\beta} = 1, \qquad \frac{x^2}{c^2\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{c^2\sin^2\alpha} = 1.$$

ieraus folgt, wenn wir die Differentialquotienten gleich für den Rand so für $\beta = b$ bilden und zur Abkürzung

5) $$\cos^2 i b - \cos^2\alpha = T$$

setzen:

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)_{\beta=b} = -\frac{i\cos\alpha\sin ib}{cT}, \qquad \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)_{\beta=b} = -\frac{\sin\alpha\cos ib}{cT},$$

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)_{\beta=b} = \frac{\sin\alpha\cos ib}{cT}, \qquad \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)_{\beta=b} = -\frac{i\cos\alpha\sin ib}{cT},$$

(66)
$$\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}\right)_{\beta=b} = \frac{i\sin i2b}{2c^2T^2}\left(\cos 2\alpha - \frac{\sin^2 2\alpha}{T}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}\right)_{\beta=b} = -\frac{i\sin i2b}{2c^2T^2}\left(\cos 2\alpha - \frac{\sin^2 2\alpha}{T}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial x\,\partial y}\right)_{\beta=b} = \frac{\sin 2\alpha}{2c^2T^2}\left(\cos i2b + \frac{\sin^2 i2b}{T}\right).$$

Nun sind noch die in der zweiten Gleichung (60) vorkomme
den Größen $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ durch α und β auszudrücken. Man h
$\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_b}$, wobei $\left(\frac{dy}{dx}\right)_b$ den Differentialquotienten für die Randellip
bedeutet, für die β den konstanten Wert b hat. Also ist

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)_b^2}.$$

Die hier vorkommende Größe $\left(\frac{dx}{dy}\right)_b^2$ ergibt sich durch Differentiation d
zwei Gleichungen (7) bei konstantem b. Man findet so mit Rücksic
auf (66)

$$\cos^2\varphi = -\frac{\sin^2 ib\cos^2\alpha}{T} = c^2T\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)_{\beta=b}^2$$

und analog:

(67)
$$\cos\varphi\sin\varphi = -\frac{i\cos ib\sin ib\cos\alpha\sin\alpha}{T} = c^2T\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)_{\beta=b},$$

$$\sin^2\varphi = \frac{\cos^2 ib\sin^2\alpha}{T} = c^2T\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)_{\beta=b}^2.$$

Um nun zunächst die drei ersten Terme der zweiten Gleichung (6
zu erhalten, multiplizieren wir die Gleichungen (63) der Reihe nach m
$\cos^2\varphi$, $2\cos\varphi\sin\varphi$ und $\sin^2\varphi$ und addieren dann. Wir finden so:

(68)
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\varphi$$

$$= \frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\left\{\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2\right\}^2 c^2T + 2\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\,\partial\alpha}\left\{\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2\right\}\left\{\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right\}c^2$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial\beta}\left\{\frac{\partial\beta}{\partial x}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial^2\beta}{\partial x\,\partial y}\right) + \frac{\partial\beta}{\partial y}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial^2\beta}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}\right)\right\}c^2T,$$

$$\beta = b.$$

ier sind noch die Koeffizienten von $\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial \alpha}$ und $\frac{\partial w}{\partial \beta}$ zu berechnen. us den in (66) angegebenen Werten folgt sofort:

9) $$\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{c^2 T},$$

0) $$\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0. \qquad (\beta = b).$$

erner ist wegen (69)

1) $$\frac{\partial \beta}{\partial x}\left\{\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y}\right\} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\left\{\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}\right\}$$

$$= \frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2}{2\,\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2}{2\,\partial y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{1}{c^2 T^2}.$$

etzt man hier

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

nd beachtet man, daß die in den vorangehenden Formeln auftretenden ifferentialquotienten $\frac{\partial \beta}{\partial x}$ und $\frac{\partial \beta}{\partial y}$ ebenfalls für $\beta = b$ zu bilden sind, so aß also $\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial x}$ und $\frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial y}$ ist, so ergibt sich für die rechte Seite on (71)

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{1}{c^2 T^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\left[\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial T}{\partial b} + \left[\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right]\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right\}\frac{1}{c^2 T^2},$$

der mit Rücksicht auf (69), (70) und (65)

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{1}{c^2 T^2} = \frac{i \sin i\,2b}{2\,c^4 T^3}.$$

ithin geht (71) über in:

2) $$\frac{\partial \beta}{\partial x}\left\{\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y}\right\} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\left\{\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}\right\} = \frac{i \sin i\,2b}{2\,c^4 T^3}$$

etzt man schließlich noch die in (69) (70) und (72) erhaltenen Aus- rücke in (68) ein, so findet man:

3) $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\cos\varphi \sin\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\varphi = \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\frac{1}{c^2 T} + \frac{\partial w}{\partial \beta}\frac{i \sin i\,2b}{2\,c^2 T^2},$$

Da nach (65)

$$c^2(\sin^2\alpha - \sin^2 ib) = c^2(\cos^2 ib - \cos^2\alpha) = c^2 T,$$

so ergibt sich mit Rücksicht auf (8) für die übrigen in der zweiten Randbedingung (60) vorkommenden Größen:

$$(74)\qquad \frac{\Theta}{1+\Theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\frac{\Theta}{1+\Theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right)\frac{1}{c^2 T}=\frac{\Theta}{1+\Theta}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\frac{1}{c^2 T},$$

da am Rande $\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}=0$ ist. Endlich sind noch die in (73) und (74) enthaltenen Werte in (60) einzuführen. Unsere zwei Grenzbedingungen gehen dann über in

$$w=0,$$

$$(75)\qquad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right)_{\beta=b}\left\{\frac{1+2\Theta}{1+\Theta}\right\}\left(\cos i\,2b-\cos 2\alpha\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial \beta}\right)_{\beta=b} i\sin i\,2b=0.$$

§ 10.

Wir setzen den Ausdruck für w in die zwei Grenzbedingungen (75) ein. Dabei ist unter anderem $\frac{\partial^2 r^2(\log r-\frac{1}{2})}{\partial \beta^2}(\cos i\,2b-\cos 2\alpha)$ zu bilden. Man findet mit Rücksicht auf (25)

$$(76)\qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\{r^2(\log r-\tfrac{1}{2})\}}{\partial \beta^2}(\cos i\,2b-\cos 2\alpha)=\frac{(e^{2b}+e^{-2b})^2}{2}\log\left(\frac{ce^b}{2}\right)$$

$$+\frac{e^{4b}-5e^{-4b}}{4}-\left[(e^{2b}+e^{-2b})\log\left(\frac{ce^b}{2}\right)+\frac{2e^{2b}-5e^{-2b}-7e^{-6b}}{4}\right]\cos 2$$

$$+(-1)^n\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(n+1)(2n^2-4n+1)e^{-(2n-4)b}-2(2n^2-1)e^{-2nb}-(n-1)(2n^2+4n+1)e^{-(2n+4}}{2n(n-1)(n+1)}\right.$$

Ferner ist $\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}(\cos i\,2b-\cos 2\alpha)$ zu bilden, wobei nach (19) und (20) F, abgesehen von einem konstanten Faktor, der zweite Teil der Verrückung w ist. Man hat

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}(\cos i\,2b-\cos 2\alpha)=B_0 2^2\cos^2 i\,2b-k_2 2\cos i\,2b-B_2\frac{4\cdot 2}{3}\cos i\,4b$$

$$+\left\{k_1\left(\cos ib\cos i\,2b-\frac{\cos ib}{2}\right)+B_1\left[\frac{3^2}{2}\cos i\,3b\left(\cos i\,2b-\frac{1}{2}\right)-\frac{\cos ib}{4}\right]\right.$$

$$(77)\qquad \left.-k_3\frac{3^2}{2}\cos i\,3b-B_3\frac{5^2}{2\cdot 4}\cos i\,5b\right\}\cos\alpha+\left\{-B_0 2^2\cos i\,2b+k_2 2^2\cos^2 i\,2\right.$$

$$\left.+B_2\frac{\cos i\,2b}{3}(4^2\cos i\,4b-2)-k_2\frac{4^2}{2}\cos i\,4b-B_4\frac{6^2}{5\cdot 2}\cos i\,6b\right\}\cos 2\alpha$$

$$+\left\{-k_1\frac{\cos ib}{2}+B_1\frac{1}{2}\left(\cos ib\cos i\,2b-\frac{3^2}{2}\cos i\,3b\right)+k_3 3^2\cos i\,3b\cos i\,2\right.$$

(Fortsetzung der Gl. (77) auf der nächsten Seite)

$$+ B_3 \frac{1}{4}\left(5^2 \cos i\,5b \cos i\,2b - \frac{3^2}{2}\cos i\,3b\right) - k_5 \frac{5^2}{2}\cos i\,5b - B_5 \frac{7^2}{2}\cos i\,7b\Big\}\cos 3\alpha$$

$$+ \sum_{n=4}^{\infty}\Big\{ - B_{n-4}\frac{(n-4)^2\cos i(n-4)b}{2(n-3)} - k_{n-2}\frac{(n-2)^2\cos i(n-2)b}{2}$$

$$+ B_{n-2}\frac{1}{(n-1)}\Big[(n-2)^2\cos i(n-2)b\cos i\,2b - \frac{n^2}{2}\cos i\,nb\Big] + k_n n^2 \cos i\,nb\cos i\,2b$$

$$+ B_n \frac{1}{(n+1)}\Big[(n+2)^2\cos i(n+2)b\cos i\,2b - \frac{n^2}{2}\cos i\,nb\Big]$$

$$- k_{n+2}\frac{(n+2)^2\cos i(n+2)b}{2} - B_{n+2}\frac{(n+4)^2}{2(n+3)}\cos i(n+4)b\Big\}\cos n\alpha.$$

Wir haben den aus (76) und (77) sich ergebenden Wert für

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}(\cos i\,2b - \cos 2\alpha) = \frac{P}{8\pi q}\Big[\frac{\partial^2 r^2(\log r - \frac{1}{2})}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}\Big](\cos i\,2b - \cos 2\alpha)$$

und den schon früher in (26) erhaltenen Wert für $\frac{\partial w}{\partial \beta}$ einzusetzen in (75). Es müssen dann alle Glieder mit $\cos 0\,\alpha$ verschwinden, ebenso alle Terme mit $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$, ... Man erhält so zusammen mit der ersten Gleichung (26) oder $w = 0$ 2 mal unendlich viele Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten $k_0, B_0, k_1, B_1, k_2, B_2, \ldots$ Da die Größen $k_0, B_0, k_2, B_2, k_4, B_4, \ldots$ nur in den Gliedern mit $\cos 0\,\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos 4\alpha$, ... auftreten, während $k_1, B_1, k_3, B_3, \ldots$ nur in den Termen mit $\cos\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\cos 5\alpha$, ... enthalten sind und da außerdem in (76) und der linken Seite von (26) keine Glieder mit $\cos\alpha$, $\cos 3\alpha$, ... vorkommen, so folgt wieder, daß

$$k_1 = k_3 = k_5 = \ldots = 0,$$

$$B_1 = B_3 = B_5 = \ldots = 0$$

ist.

Die Gleichungen, die zur Bestimmung der $k_0, B_0, k_2, B_2, \ldots$ dienen, sind die folgenden:

$$\Big\{B_0 2^2\cos^2 i\,2b - k_2\,2\cos i\,2b - B_2\frac{4\cdot 2}{3}\cos i\,4b\Big\}\frac{1+2\Theta}{1+\Theta} + B_0\frac{2\sin^2 i\,2b}{1}$$

$$= -c^2\Big[\frac{(e^{2b}+e^{-2b})^2}{2}\log\Big(\frac{ce^b}{2}\Big) + \frac{e^{4b}-5e^{-4b}}{4}\Big]\frac{1+2\Theta}{1+\Theta} + c^2\Big(\frac{e^{2b}-e^{-2b}}{2}\Big)^2\log\Big(\frac{ce^b}{2}\Big),$$

$$k_0 + B_0\cos i\,2b = -\frac{c^2 e^{eb}}{4}\Big[(1+e^{-4b})\log\Big(\frac{ce^b}{2}\Big) - \frac{1}{2} + \frac{e^{-4b}}{2}\Big],$$

$$(78c)\quad \Big\{-B_0 2^2\cos i2b + k_2 2^2\cos^2 i2b + B_2\frac{\cos i2b}{3}(4^2\cos i4b - 2)$$

$$k_4\frac{4^2}{2}\cos i4b - B_4\frac{6^2}{5\cdot 2}\cos i6b\Big\}\frac{1+2\Theta}{1+\Theta} + k_2\sin^2 i2b + B_2\frac{4\sin i4b\sin i2b}{3}$$

$$= c^2\Big[(e^{2b}+e^{-2b})\log\Big(\frac{ce^b}{2}\Big) + \frac{2e^{2b}-5e^{-2b}-7e^{-6b}}{4}\Big]\frac{1+2\Theta}{1+\Theta}$$

$$+\frac{c^2}{4}(e^{2b}-2e^{-2b}+e^{-6b}),$$

$$(78d)\quad k_3\cos i2b + B_0 + B_2\frac{\cos i4b}{3} = -\frac{c^2e^{2b}}{4}\Big[2e^{-2b}\log\Big(\frac{ce^b}{2}\Big) + \frac{e^{-6b}}{2}\Big],$$

$$(78e)\quad \Big\{-B_{2n-4}\frac{(2n-4)^2\cos i(2n-4)b}{2(2n-3)} - k_{2n-2}\frac{(2n-2)^2\cos i(2n-2)b}{2}$$

$$+B_{2n-2}\frac{1}{(2n-1)}\Big[(2n-2)^2\cos i(2n-2)b\cos i2b - 2n^2\cos i2nb\Big]$$

$$+k_{2n}4n^2\cos i2nb\cos i2b$$

$$+B_{2n}\frac{1}{(2n+1)}\Big[(2n+2)^2\cos i(2n+2)b\cos i2b - 2n^2\cos i2nb\Big]$$

$$-k_{2n+2}\frac{(2n+2)^2\cos i(2n+2b)}{2}$$

$$-B_{2n+2}\frac{(2n+4)^2}{(2n+3)}\cos i(2n+4)b\Big\}\frac{1+2\Theta}{1+\Theta} + k_{2n}2n\sin i2nb\sin i2b$$

$$+B_{2n-2}\frac{(2n-2)\sin i(2n-2)b\sin i2b}{2n-1} + B_{2n}\frac{(2n+2)\sin i(2n+2)b\sin i2b}{2n+1}$$

$$=(-1)^{n+1}c^2\Big[\frac{(n+1)(2n^2-4n+1)e^{-(2n-4)b} - 2(2n^2-1)e^{-2nb} - (n-1)(2n^2+4n+1)e^{-(2n+4}}{2n(n-1)(n+1)}$$

$$+c^2\frac{(-1)^{n+1}(e^{-(2n-4)b} - 2e^{-2nb} + e^{-(2n+4)b}}{4n},$$

$$(78f)\quad k_{2n}\cos i2nb + B_{2n}\frac{\cos i(2n+2)b}{2n+1} + B_{2n-2}\frac{\cos i(2n-2)b}{2n-1}$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{c^2}{4n}\Big[\frac{e^{-(2n-2)b}}{n-1} - \frac{e^{-(2n+2)b}}{n+1}\Big].$$

Um aus den Gleichungen (78) die Konstanten $k_0, B_0, k_2, B_2, \ldots$ zu berechnen, verfahren wir in ähnlicher Weise, wie dies Mathieu[10]) bei dem von ihm behandelten Problem tut, doch können wir im einzelnen unsere Betrachtungen weitergehender gestalten. Wir setzen:

$$(79)\quad \beta = \log\Big(\varrho\frac{2}{c}\Big).$$

[10]) É. Mathieu l. c.

Für diejenige Ellipse, die den Rand bildet, ist $\beta = b$ und der zugehörige Wert von ϱ sei $= \varrho_0$. Man hat dann

(80) $$b = \log\left(\varrho_0 \frac{2}{c}\right).$$

Diejenige Ellipse, die durch den Wert β charakterisiert ist, hat eine große Halbachse, die nach (64) gleich $c \cos i b = c\left(\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}\right)$ ist. Setzt man hier für β seinen Wert aus (79) ein, so folgt, falls man zur Abkürzung

(81) $$\frac{c}{2} = p$$

setzt:

(82) $$c \cos i\beta = c\left(\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}\right) = \varrho + \frac{c^2}{4\varrho} = \varrho + \frac{p^2}{\varrho}.$$

Die große Halbachse der Randellipse ist:

(83) $$c \cos i b = c\left(\frac{e^{b} + e^{-b}}{2}\right) = \varrho_0 + \frac{c^2}{4\varrho_0} = \varrho_0 + \frac{p^2}{\varrho}.$$

Verschwindet die Exzentrizität c, so gehen beide eben betrachteten Ellipsen in Kreise über von den Radien ϱ und ϱ_0.

Zur Berechnuug der Konstanten k_0, k_2, ... B_0, B_2, ..., denken wir uns jede dieser Größen nach Potenzen von $\frac{c^2}{4} = p^2$ entwickelt. Auch bei dem im vorangehenden betrachteten Problem der Plattenbiegung, wo der Rand eingeklemmt war, kann man die Ausdrücke für die k_0, k_2, ... B_0, B_2, ... als Reihen auffassen, die nach Potenzen von p^2 fortschreiten. Die Größen k_0, B_0 z. B. können nach (28), (29) und (80) folgendermaßen geschrieben werden:

$$k_0 = \frac{c^2}{8}\left(e^{2b} - e^{-2b}\right) = \frac{\varrho_0^2}{2} - \frac{c^4}{32\varrho_0^2} = \frac{\varrho_0^2}{2} - \frac{p^4}{2\varrho_0^2},$$

$$B_0 = -\frac{c^2}{2}\log\left(\frac{ce^{b}}{2}\right) = -2p^2 \log \varrho_0.$$

In k_0 und B_0 sind also die ersten Glieder proportional bzw. mit p^0 und p^2. Analog ergibt sich leicht, daß in k_2 und B_2 die ersten Terme proportional sind bezw. mit p^4 und p^6, ferner enthalten die ersten Glieder von k_4 und B_4 bzw. p^8 und p^{10} usw. Während also k_0, k_2, k_4, ... bzw. von der Ordnung p^0, p^4, p^8, ... sind, sind die in (19) vorkommenden Größen k_0, $k_2 \cos i 2\beta$, $k_4 \cos i 4\beta$, ... wegen (79) bzw. von der Ordnung p^0, p^2, p^4, ...; ferner sind B_0, B_2, B_4, ..., wie eben schon angegeben, von der Ordnung p^2, p^6, p^{10}, ...; während die in (19) ebenfalls auftretenden Terme $B_0 \cos i 2\beta$, $B_2 \cos i 4\beta$, $B_4 \cos i 6 i\beta$ wiederum von der Ordnung p^0, p^2, p^4, ... sind. Zur Befriedigung der Gleichungen (78) machen wir gerade so wie bei unserem früheren Problem die Ansätze:

$$
\begin{aligned}
k_0 &= k_{00} + k_{02}\,p^2 + k_{04}\,p^4 + \dots \\
k_2 &= k_{20}\,p^4 + k_{22}\,p^6 + k_{24}\,p^8 + \dots \\
k_4 &= k_{40}\,p^8 + k_{42}\,p^{10} + k_{44}\,p^{12} + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
B_0 &= B_{00}\,p^2 + B_{02}\,p^4 + B_{04}\,p^6 + \dots \\
B_2 &= B_{20}\,p^6 + B_{22}\,p^8 + B_{24}\,p^{10} + \dots \\
B_4 &= B_{40}\,p^{10} + B_{42}\,p^{12} + B_{44}\,p^{14} + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{84}
$$

Hier sind die $k_{2n,\,2m}$ und $B_{2n,\,2m}$ Konstanten, die unabhängig von p oder, was auf dasselbe hinauskommt, von der Exzentrizität c sind. Wären die Relationen (84) unrichtig, so würde man im folgenden bei der Bestimmung der Größen $k_{2n,\,2m}$ und $B_{2n,\,2m}$ auf einen Widerspruch stoßen, was aber nicht der Fall ist, Näheres siehe weiter unten. Im allgemeinen Glied des Ausdrucks (19) für F treten die Terme $k_{2n}\cos i\,2n\beta$, $B_{2n-2}\cos i(2n-2)\beta$ und $B_{2n}\cos i(2n+2)\beta$ auf. Diese sind sämtlich von der Ordnung p^{2n}, denn k_{2n}, B_{2n-2}, B_{2n} sind bzw. proportional p^{4n}, p^{4n-2}, p^{4n+2} und $\cos i\,2n\beta$, $\cos i(2n-2)\beta$, $\cos i(2n+2)\beta$ sind wegen (79) bzw. proportional $\frac{1}{p^{2n}}$, $\frac{1}{p^{2n-2}}$, $\frac{1}{p^{2n+2}}$.

Um die Konstanten $k_{2n,\,2m}$ und $B_{2n,\,2m}$ zu berechnen, haben wir noch in den Gleichungen (78) statt b und c die Größen ϱ_0 und p einzuführen. Mit Rücksicht auf (80) ist also zu setzen:

$$
e^{2nb} = \frac{\varrho_0^{2n}}{p^{2n}}, \qquad e^{-2nb} = \frac{p^{2n}}{\varrho_0^{2n}},
$$

$$
\cos i\,2nb = \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho_0^{2n}}{p^{2n}} + \frac{p^{2n}}{\varrho_0^{2n}}\right), \qquad \sin i\,2nb = \frac{i}{2}\left(\frac{\varrho_0^{2n}}{p^{2n}} - \frac{p^{2n}}{\varrho_0^{2n}}\right).
$$

Die Relationen (78a) bis (78d) sowie (78e) und (78f) für $n=2$ (die weiteren übrigens leicht angebbaren Gleichungen spielen im folgenden keine Rolle) gehen dann über in:

$$
\begin{aligned}
&\Big|(B_{00}p^2 + B_{02}p^4 + \dots)\left(\frac{\varrho_0^4}{p^4} + 2 + \frac{p^4}{\varrho_0^4}\right) - (k_{20}p^4 + \dots)\left(\frac{\varrho_0^2}{p^2} + \frac{p^2}{\varrho_0^2}\right) \\
&\quad - (B_{20}p^6 + \dots)\frac{4}{3}\left(\frac{\varrho_0^4}{p^4} + \frac{p^4}{\varrho_0^4}\right)\Big]\frac{1+2\Theta}{1+\Theta} - (B_{00}p^2 + B_{02}p^4 + \dots)\frac{1}{2}\left(\frac{\varrho_0^4}{p^4} - 2 + \frac{p^4}{\varrho_0^4}\right) \\
&= -4p^2\left[\left(\frac{\varrho_0^4}{p^4} + 2 + \frac{p^4}{\varrho_0^4}\right)\frac{1}{2}\log\varrho_0 + \left(\frac{\varrho_0^4}{p^4} - 5\frac{p^4}{\varrho_0^4}\right)\frac{1}{4}\right]\frac{1+1\Theta}{1+\Theta} + p^2\left(\frac{\varrho_0^4}{p^4} - 2 + \frac{p^4}{\varrho_0^4}\right)\log
\end{aligned}
\tag{85}
$$

(Fortsetzung der Gl. (85) auf der nächs

$$(k_{00}+k_{02}p^2+\ldots)+(B_{00}p^2+B_{02}p^4+\ldots)\left(\frac{\varrho_0^2}{p^2}+\frac{p^2}{\varrho_0^2}\right)\frac{1}{2}$$
$$=-\varrho_0^2\left[\left(1+\frac{p^4}{\varrho_0^4}\right)\log\varrho_0-\frac{1}{2}+\frac{p^4}{2\varrho_0^4}\right],$$

$$\left[-(B_{00}p^2+B_{02}p^4+\ldots)2\left(\frac{\varrho_0^4}{p^2}+\frac{p^2}{\varrho_0^2}\right)+(k_{20}p^4+\ldots)\left(\frac{\varrho_0^4}{p^4}+2+\frac{p^4}{\varrho_0^4}\right)\right.$$
$$+(B_{20}p^6+\ldots)\frac{1}{3}\left(4\frac{\varrho_0^6}{p^6}+3\frac{\varrho_0^2}{p^2}+3\frac{p^2}{\varrho_0^2}+4\frac{p^6}{\varrho_0^6}\right)-(k_{40}p^8+\ldots)4\left(\frac{\varrho_0^4}{p^4}+\frac{p^4}{\varrho_0^4}\right)$$
$$-(B_{40}p^{10}+\ldots)\frac{3^2}{5}\left(\frac{\varrho_0^6}{p^6}+\frac{p^6}{\varrho_0^6}\right)\frac{1+2\Theta}{1+\Theta}-(k_{20}p^4+\ldots)\frac{1}{2}\left(\frac{\varrho_0^4}{p^4}-2+\frac{p^4}{\varrho_0^4}\right)$$
$$-(B_{20}p^6+\ldots)\frac{1}{3}\left(\frac{\varrho_0^6}{p^6}-\frac{\varrho_0^2}{p^2}-\frac{p^2}{\varrho_0^2}+\frac{p^6}{\varrho_0^6}\right)=4p^2\left[\left(\frac{\varrho_0^2}{p^2}+\frac{p^2}{\varrho_0^2}\right)\log\varrho_0\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}\left(2\frac{\varrho_0^2}{p^2}-5\frac{p^2}{\varrho_0^2}-7\frac{p^6}{\varrho_0^6}\right)\right]\frac{1+1\Theta}{1+\Theta}+p^2\left(\frac{\varrho_0^2}{p^2}-2\frac{p^2}{\varrho_0^2}+\frac{p^6}{\varrho_0^6}\right),$$

$$k_{20}p^4+\ldots)\frac{1}{2}\left(\frac{\varrho_0^2}{p^2}+\frac{p^2}{\varrho_0^2}\right)+(B_{00}p^2+B_{02}p^4+\ldots)+(B_{20}p^6+\ldots)\frac{1}{6}\left(\frac{\varrho_0^4}{p^4}+\frac{p^4}{\varrho_0^4}\right)$$
$$=-\varrho^2\left[2\frac{p^2}{\varrho_0^2}\log\varrho_0+\frac{p^6}{2\varrho_0^6}\right],$$

$$\left[-(k_{20}p^4+\ldots)\left(\frac{\varrho_0^2}{p^2}+\frac{p^2}{\varrho_0^2}\right)+(B_{20}p^6+\ldots)\frac{1}{3}\left(-3\frac{\varrho_0^4}{p^4}+2-3\frac{p^4}{\varrho_0^4}\right)\right.$$
$$(k_{40}p^8+\ldots)4\left(\frac{\varrho_0^6}{p^6}+\frac{\varrho_0^2}{p^2}+\frac{p^2}{\varrho_0^2}+\frac{p^6}{\varrho_0^6}\right)+(B_{40}p^{10}+\ldots)\frac{1}{5}\left(9\frac{\varrho_0^8}{p^8}+5\frac{\varrho_0^4}{p^4}+5\frac{p^4}{\varrho_0^4}+9\frac{p^8}{\varrho_0^8}\right)$$
$$(k_{60}p^{12}+\ldots)9\left(\frac{\varrho_0^6}{p^6}+\frac{p^6}{\varrho_0^6}\right)-(B_{60}p^{14}+\ldots)\frac{16}{7}\left(\frac{\varrho_0^8}{p^8}+\frac{p^8}{\varrho_0^8}\right)\left.\right]\frac{1+2\Theta}{1+\Theta}$$
$$(k_{40}p^8+\ldots)\left(\frac{\varrho_0^6}{p^6}-\frac{\varrho_0^2}{p^2}-\frac{p^2}{\varrho_0^2}+\frac{p^6}{\varrho_0^6}\right)-(B_{20}p^6+\ldots)\frac{1}{6}\left(\frac{\varrho_0^4}{p^4}-2+\frac{p^4}{\varrho_0^4}\right)$$
$$B_{40}p^{10}+\ldots)\frac{3}{10}\left(\frac{\varrho_0^8}{p^8}-\frac{\varrho_0^4}{p^4}-\frac{p^4}{\varrho_0^4}+\frac{p^8}{\varrho_0^8}\right)$$
$$4p^2\left[\frac{3-14\frac{p^4}{\varrho_0^4}-17\frac{p^8}{\varrho_0^8}}{4\cdot3}\right]\frac{1+2\Theta}{1+\Theta}-\frac{p^2}{2}\left(1-2\frac{p^4}{\varrho_0^4}+\frac{p^8}{\varrho_0^8}\right),$$

$$p^8+\ldots)\frac{1}{2}\left(\frac{\varrho_0^4}{p^4}+\frac{p^4}{\varrho_0^4}\right)+(B_{40}p^{10}+\ldots)\frac{1}{10}\left(\frac{\varrho_0^6}{p^6}+\frac{p^6}{\varrho_0^6}\right)+(B_{20}p^6+\ldots)\frac{1}{6}\left(\frac{\varrho_0^2}{p^2}+\frac{p^2}{\varrho_0^4}\right)$$
$$=-\frac{p^2}{2}\left[\frac{p^2}{\varrho_0^2}-\frac{p^6}{3\varrho_0^6}\right].$$

§ 11.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns der Berechnung der Konstanten $k_{2n,\,2m}$ und $B_{2n,\,2m}$ aus den Relationen (85). Berücksichtigt man nur die niedrigsten Potenzen von p, so erhält man aus den zwei ersten Gleichungen (85) die folgenden zwei Relationen zur Bestimmung von k_{00} und B_{00}:

$$B_{00}\left(\frac{1+2\Theta}{1+\Theta}-\frac{1}{2}\right)\varrho_0^4 = -\left[2\varrho_0^4\log\varrho_0+\varrho_0^4\right]\frac{1+2\Theta}{1+\Theta}+\varrho_0^4\log\varrho_0$$

(86)

$$k_{00}+B_{00}\frac{\varrho_0^2}{2} = -\varrho_0^2\log\varrho_0+\frac{\varrho_0^2}{2}.$$

Hieraus folgt:

$$B_{00} = \frac{\dfrac{1+2\Theta}{1+\Theta}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1+2\Theta}{1+\Theta}}-2\log\varrho_0$$

(87)

$$k_{00} = \varrho_0^2\left\{\frac{1}{2}-\frac{\dfrac{1+2\Theta}{1+\Theta}}{1-2\dfrac{1+2\Theta}{1+\Theta}}\right\}.$$

In dem Fall, wo die Exzentrizität verschwindet und also die elliptische Platte kreisförmig ist, reduziert sich der Ausdruck (19) für F auf

$$F = k_0+B_0\cos i\,2\beta = k_{00}+B_{00}\frac{\varrho^2}{2}$$

$$= \frac{\varrho_0^2}{2}-\frac{\dfrac{1+2\Theta}{1+\Theta}}{1-2\left(\dfrac{1+2\Theta}{1+\Theta}\right)}(\varrho_0^2-\varrho^2)-\varrho^2\log\varrho_0.$$

Hier bedeutet ϱ_0 den Radius der kreisförmigen Platte. Für die Verschiebung w erhält man in diesem Fall nach (62), da im Fall verschwindender Exzentrizität ϱ identisch ist mit der Größe r von (62)

$$w = \frac{P}{8\pi q}\left[r^2\log\left(\frac{r}{\varrho_0}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{3+7\Theta}{1+3\Theta}\right)(\varrho_0^2-r^2)\right]. \tag{88}$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit der wohlbekannten Formel für die Deformation einer kreisförmigen am Rande gestützten Platte unter einer Einzellast im Mittelpunkt[11]).

Zur genaueren Berechnung von w hat man zunächst k_{02}, B_{02}, k_{20} und B_{20} zu ermitteln. Diese Größen treten in w in den Ausdrücken

$$k_{02}\,p^2,\quad B_{02}\,p^4\cos i\,2\beta,\quad k_{20}\,p^4\cos i\,2\beta,\quad B_{20}\,p^6\cos i\,4\beta$$

[11]) Vgl. z. B. Love, Lehrbuch der Elastizität, deutsch von A. Timpe. Leipzig u. Berlin 1907, S. 561. Die bei Love vorkommende Größe σ ist identisch mit $\frac{\Theta}{1+2\Theta}$.

auf, welche sämtlich von der Ordnung p^2 sind, da $p^2 \cos i\, 2\beta$ und $p^4 \cos i\, 4\beta$ wegen (79) von der Ordnung p^6 sind. Die Bestimmungsgleichungen für die eben genannten vier Größen k_{02}, B_{02}, k_{20} und B_{20} ergeben sich aus den vier ersten Relationen (85), sie lauten:

$$B_{02}\varrho_0^4\left(\frac{1+2\Theta}{1+\Theta}-\frac{1}{2}\right)=0,$$

$$k_{02}+B_{02}\frac{\varrho_0^2}{2}=0,$$

$$(89)\qquad k_{20}\varrho_0^4\left[\frac{1+2\Theta}{1+\Theta}-\frac{1}{2}\right]+B_{20}\varrho_0^6\left[\frac{4}{3}\left(\frac{1+2\Theta}{1+\Theta}\right)-\frac{1}{3}\right]-B_{00}2\varrho_0^2$$
$$=[4\varrho_0^2\log\varrho_0+2\varrho_0^2]\frac{1+2\Theta}{1+\Theta}+\varrho_0^2,$$

$$k_{20}\frac{\varrho_0^2}{2}+B_{00}+B_{20}\frac{\varrho_0^4}{6}=-2\log\varrho_0.$$

Beachtenswert ist, daß die zwei ersten Unbekannten k_{02} und B_{02} nur in der 1. und 2. Gleichung und die zwei letzten Unbekannten k_{20} und B_{20} nur in der 3. und 4. Gleichung vorkommen. Die Berechnung der vier Unbekannten k_{02}, B_{02}, k_{20} und B_{20} bietet keine Schwierigkeit, insbesondere sind k_{02} und B_{02} gleich Null.

Hiernach handelt es sich darum, die sechs Größen k_{04}, B_{04}, k_{22}, B_{22}, k_{40}, B_{40} zu ermitteln. Sie kommen in den Ausdrücken $k_{04}p^4$, $B_{04}p^6\cos i\,2\beta$, $k_{22}p^6\cos i\,2\beta$, $B_{22}p^8\cos i\,4\beta$, $k_{40}p^8\cos i\,4\beta$, $B_{40}p^{10}\cos i\,6\beta$ vor, welche sämtlich von der Ordnung p^4 sind. Aus den sechs in (85) hingeschriebenen Gleichungen gewinnt man leicht die Relationen, die zur Bestimmung der sechs eben genannten Größen dienen. Es ergibt sich wieder, daß die zwei ersten dieser Gleichungen nur die zwei ersten Unbekannten k_{04}, B_{04} enthalten, in der 3. und 4. Gleichung kommen nur die Größen k_{22} und B_{22} vor, und in der 5. und 6. Gleichung treten nur k_{40} und B_{40} auf. Infolge dieses Umstandes bietet die Berechnung der Unbekannten keine Schwierigkeit, insbesondere sind k_{22} und B_{22} gleich Null.

Die weiteren Annäherungen ermittelt man in analoger Weise. Es zeigt sich dabei, daß man die bei den einzelnen Approximationen vorkommenden Gleichungen stets mittels der Ansätze (84) befriedigen kann. Den Beweis kann man mittels des Schlusses von $n-1$ auf n führen. Gesetzt man habe die Größen $k_{0,2n-2}$, $B_{0,2n-2}$, $k_{2,2n-4}$, $B_{2,2n-4}$, $\ldots$, $k_{2n-2,0}$, B_{2n-2n} ermittelt und dabei stets gefunden, daß die Ansätze (84) nirgends zu einem Widerspruch führen. Wir wollen nun zeigen, daß auch bei der Berechnung der Größen

$$(90)\qquad k_{0,2n},\quad B_{0,2n},\quad k_{2,2n-2},\quad B_{2,2n-2},\quad \ldots,\quad k_{2n,0},\quad B_{2n,0}.$$

die Ansätze (84) sich bewähren und also richtig sind. Dazu haben wir

nur die Gleichungen aufzustellen, die zur Berechnung dieser Unbekannten dienen. Die Relationen zur Bestimmung der $k_{4,2n-4}$ und $B_{4\,2n-4}$ beispielsweise ergeben sich aus den Gleichungen (78e) und (78f) für $n=2$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, aus der 5. und 6. Gleichung (85), und zwar hat man in der 5. Gleichung (85) alle Glieder mit p^{2n-2} und in der 6. Gleichung (85) alle Terme mit p^{2n} zu betrachten; denn handelt es sich z. B. darum, aus der 5. und 6. Gleichung (85) die Größen k_{40} und B_{40} zu berechnen, so kommen bzw. die Glieder mit p^2 und p^4 in Betracht, handelt es sich darum, aus den zwei eben genannten Gleichungen k_{42} und B_{42} zu bestimmen, so kommen die Terme mit p^4 und p^6 in Betracht usw.

Die Relationen zur Ermittelung der $k_{4,2n-4}$ und $B_{4,2n-4}$ sind in (91) angegeben, dabei sind die rechten Seiten, auf die es für unsere jetzigen Zwecke nicht weiter ankommt, durch Punkte angedeutet.

$$
\begin{aligned}
&\Big[-k_{2,2n-4}\varrho_0^2 - k_{2,2n-8}\frac{1}{\varrho_0^2} - B_{2,2n-4}\varrho_0^4 + 2B_{2,2n-8} - B_{2,2n-12}\frac{1}{\varrho_0^4} \\
&+ k_{4,2n-4}\,4\,\varrho_0^6 + k_{4,2n-8}\,4\,\varrho_0^2 + k_{4,2n-12}\frac{4}{\varrho_0^2} + k_{4,2n-16}\frac{4}{\varrho_0^6} + B_{4,2n-4}\frac{9}{5}\varrho_0^8 \\
&+ B_{4,2n-8}\varrho_0^4 + B_{4,2n-16}\frac{1}{\varrho_0^4} + B_{4,2n-20}\frac{9}{5\,\varrho_0^8} - k_{6,2n-8}\,9\,\varrho_0^6 - k_{6,2n-20}\frac{9}{\varrho_0^6} \\
&- B_{6,2n-8}\frac{16}{7}\varrho_0^8 - B_{6,2n-24}\frac{16}{7\,\varrho_0^8}\Big]\frac{1+2\Theta}{1+\Theta} - k_{4,2n-4}\varrho_0^6 + k_{4,2n-8}\varrho_0^2 \\
&+ k_{4,2n-12}\frac{1}{\varrho_0^2} - k_{4,2n-16}\frac{1}{\varrho_0^6} - B_{2,2n-4}\frac{\varrho_0^4}{6} + B_{2,2n-8}\frac{1}{3} - B_{2,2n-12}\frac{1}{6\,\varrho_0^4} \\
&- B_{4,2n-4}\frac{3}{10}\varrho_0^8 + B_{4,2n-8}\frac{3}{10}\varrho_0^4 + B_{4,2n-16}\frac{3}{10\,\varrho_0^4} - B_{4.2n-20}\frac{3}{10\,\varrho_0^8} = \ldots \\
&k_{4,2n-4}\frac{\varrho_0^4}{2} + k_{4,2n-12}\frac{1}{2\,\varrho_0^4} + B_{4,2n-4}\frac{\varrho_0^6}{10} + B_{4,2n-16}\frac{1}{10\,\varrho_0^6} + B_{2.2n-4}\frac{\varrho_0^2}{6} \\
&+ B_{2,2n-8}\frac{1}{6\,\varrho_0^2} = \ldots .
\end{aligned}
\tag{91}
$$

In diesen zwei Gleichungen treten nur die zwei Unbekannten $k_{4,2n-4}$ und $B_{4,2n-4}$ auf, alle andern in (91) vorkommenden Größen von der Form $k_{2i,2j}$ und $B_{2i,2j}$ sind bereits bei den früheren Approximationen ermittelt, da bei ihnen $2i+2j<2n$ ist. Aus den Relationen (91), die natürlich ebenso wie die 5. und 6. Gleichung (85), aus denen sie gewonnen sind, mittels der Ansätze (84) gebildet sind, berechnen sich sofort die zwei Unbekannten $k_{4,2n-4}$ und $B_{4,2n-4}$. Stellt man in analoger Weise die Gleichungen auf zur Bestimmung der übrigen der Unbekannten (90), wobei dann wieder die Ansätze (84) benutzt werden, so ergeben sich aus ihnen stets bestimmte Werte für die Unbekannten, womit die Gültigkeit der

nsätze (84) bewiesen ist. Nachdem so gezeigt ist, wie man die suk-essiven Approximationen ermittelt, ist auch unser zweites Problem erledigt.

§ 12.

Wie schon in § 1 erwähnt wurde, beschäftigt sich Mathieu mit dem roblem, eine Funktion F so zu bestimmen, daß sie innerhalb einer llipse der Gleichung $\Delta\Delta F = 0$ genügt und die zwei Randbedingungen $F = \varphi$ nd $\frac{\partial F}{\partial n} = \psi$ befriedigt, wo φ und ψ gegebene Funktionen der Randpunkte ind. Auch dies Problem läßt sich, wie wir jetzt noch andeuten wollen, ach unserer Methode behandeln und man kommt dabei in rascherer und infacherer Weise als Mathieu zum Ziel. Sind nämlich, wie wir zunächst nnehmen wollen, die zwei Funktionen φ und ψ symmetrisch in bezug auf ie x- und y-Achse, so hat man für F wieder den Ansatz (19) zu machen nd alsdann die Konstanten k_n und B_n so zu bestimmen, daß sie den wei Randbedingungen genügen; hierbei sind φ und ψ, ebenso wie wir es it F und $\frac{\partial F}{\partial n}$ bzw. $\frac{\partial F}{\partial \beta}$ taten, in Fouriersche Reihen zu entwickeln.)urch Vergleichung der Koeffizienten entsprechender Glieder rechts und inks bei beiden Gleichungen erhält man die Relationen zur Bestimmung er Konstanten k_n und B_n. Weisen φ und ψ nicht die eben genannten ymmetrieeigenschaften auf, so hat man für F einen übrigens leicht an-ebbaren allgemeineren Ansatz zu machen, im übrigen aber wieder in der ben angegebenen Weise zu verfahren.

(Eingegangen am 18. Juli 1920.)

Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion.

(Zweite Mitteilung).[1])

Von

Hans Hamburger in Berlin.

1. In der vorliegenden Mitteilung werden einige allgemeine Sätze bewiesen, die sich an die Problemstellung der ersten Mitteilung gleichen Titels anschließen. Die Bedeutung dieser Sätze, die weniger ein selbständiges Interesse zu verdienen scheinen, wird sich erst in einer weiteren dritten Mitteilung ergeben, welche sich mit den Dirichletschen L-Reihen beschäftigen wird.

Durch das Studium dieser Reihen wird man nämlich auf die vier Funktionalgleichungen

$$\text{(I)} \qquad f(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}} = f(1-s)\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s-1}{2}},$$

$$\text{(I')} \qquad f(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}} = -f(1-s)\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s-1}{2}},$$

$$\text{(II)} \qquad f(s)\,\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}} = f(1-s)\,\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s-1}{2}},$$

$$\text{(II')} \qquad f(s)\,\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}} = -f(1-s)\,\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s-1}{2}}$$

geführt, und auf die Resultate dieser zweiten Mitteilung gestützt, werde ich dann in der dritten Mitteilung beweisen, daß, wenn k eine ganze positive Zahl bezeichnet, k und nur k voneinander linear unabhängige

[1]) Vgl. die erste Mitteilung gleichen Titels des Verfassers (im folgenden kurz mit 1. Mtlg. zitiert), Math. Zeitschr., 10 (1921), S. 240–254 und die Note des Verfassers in den Sitzber. der Berl. Math. Ges., XX. Jahrgang (1920/21), S. 4–9, insbes. S. 7–9.

Dirichletsche Reihen $f(s)$ existieren, die einer der vier Funktionalgleichungen (I), (I'), (II), (II') genügen[2]).

Ist hingegen k eine gebrochene oder irrationale positive Zahl, so haben die vier Funktionalgleichungen überhaupt keine Lösung $f(s)$, die gleichzeitig eine Dirichletsche Reihe ist und noch einige weitere allgemeine Bedingungen (die Bedingungen **a)**, **b)** und **c)** von Satz 3 dieser Mitteilung) erfüllt.

Mit Hilfe der L-Reihen gelingt es schließlich, ein vollständiges System von k linear unabhängigen Lösungen von (I), (I'), (II), (II') explizit anzugeben.

2. Im § 1 der vorliegenden Mitteilung sind die Sätze formuliert, soweit sie mit den Funktionalgleichungen (I) und (I') zusammenhängen. Aus diesen Sätzen ergibt sich unmittelbar eine Folgerung, die das Resultat der ersten Mitteilung über die ζ-Funktion verallgemeinert.

In den §§ 2 und 3 finden sich die Beweise der Sätze 3 und 4 des § 1.

Der § 4 endlich enthält die entsprechenden Betrachtungen über Lösungen einer Funktionalgleichung, die mit (II) und (II') zusammenhängt.

§ 1.

Formulierung der Sätze; Anwendung auf die ζ-Funktion.

1. Satz 3. *Es sei $f(s)$ eine für alle Werte der komplexen Veränderlichen $s = \sigma + it$ definierte analytische Funktion mit den Eigenschaften:*

a) *$f(s)$ besitze im Endlichen höchstens endlich viele Pole beliebiger Ordnung.*

b) *Es mögen zwei positive Konstanten r und γ existieren, derart, daß für $|s| \geqq r$ die Funktion $f(s)$ im Endlichen überall regulär ist und sich dort durch die Beziehung*

$$|f(s)| \leqq e^{|s|^{\gamma}}$$

abschätzen läßt.

c) *Für $\sigma > 1$ sei $f(s)$ durch eine absolut konvergente Dirichletsche Reihe*

1) $$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

definiert.

---

[2]) Vgl. die Note des Verfassers: Über die Funktionalgleichung der L-Reihen, Sitzber. der Berl. Math. Ges., XX. Jahrgang (1920/21), S. 10–13.

d'') *Setzt man*

$$g(1-s) = f(s)\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\pi^{-s+\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

so lasse sich $g(1-s)$ *für* $\sigma < -\alpha$, *unter* α *eine endliche positive Zahl verstanden, durch eine absolut konvergente Dirichletsche Reihe allgemeiner Gestalt*

$$g(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_n}{l_n^{1-s}} \quad (0 < l_1 < l_2 < \ldots \to \infty) \tag{3}$$

darstellen.

Dann muß die Dirichletsche Reihe (3) *den Bedingungen genügen*

e) *Sind*

$$l_1 < l_2 < \ldots < l_k = 1 \text{ [3]}$$

sämtliche der Zahlen l_n, *die* $\leqq 1$ *sind, so ist, wenn* $n = \mu k + \varkappa$ $(\mu \geqq 1,\ 1 \leqq \varkappa \leqq k)$ *gesetzt wird,*

$$l_n = \mu + l_\varkappa, \quad b_n = b_\varkappa,$$

mithin ist die Dirichletsche Reihe (3) *von der Gestalt*

$$g(1-s) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{b_\varkappa}{(\mu + l_\varkappa)^{1-s}}. \tag{4}$$

f) *Es ist für* $1 \leqq \varkappa \leqq k-1$

$$l_{k-\varkappa} = 1 - l_\varkappa, \quad b_{k-\varkappa} = b_\varkappa.$$

g) *Endlich sind die Koeffizienten* a_n *der Dirichletschen Reihe* (1) *mit den* $b_\varkappa$ *und* $l_\varkappa$ *durch die Beziehungen*

$$a_n = \sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa \cos 2\pi n l_\varkappa \tag{5}$$

verknüpft.

2. Es sei umgekehrt eine Dirichletsche Reihe der Gestalt (4) vorgelegt. Diese Reihe ist immer für $\sigma < 0$ absolut konvergent, die durch sie dargestellte Funktion $g(1-s)$ läßt sich (wie bereits bekannt ist[4])

---

[3]) Es wird in dieser Arbeit ein für allemal $l_k = 1$ gesetzt. Sollte zunächst unter den Größen l_n die Zahl 1 nicht vorkommen, so werden der einheitlichen Schreibweise wegen die formalen Glieder $\frac{b_k}{(1+m)^{1-s}}$ $(m = 0, 1, \ldots \to \infty,\ b_k = 0)$ der Dirichletschen Reihe $g(1-s)$ hinzugefügt.

[4]) H. Kinkelin, Allgemeine Theorie der harmonischen Reihen mit Anwendung auf die Zahlentheorie. Programm der Gewerbeschule Basel (1861/62), S. 1–32. Vgl. auch E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig

n der ganzen komplexen s-Ebene analytisch fortsetzen und ist überall n Endlichen regulär, mit Ausnahme höchstens der Stelle $s = 0$, wo $(1-s)$ einen Pol erster Ordnung besitzen kann.

Bildet man andererseits mit den Koeffizienten a_n der Formeln (5) ie Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

) ist sie offenbar wegen $|a_n| \leqq \sum_{\varkappa=1}^{k} |b_\varkappa|$ für $\sigma > 1$ absolut konvergent. Nunmehr behaupten wir

Satz 4. *Es sei die Funktion $g(1-s)$ für $\sigma < 0$ durch eine Dirichletsche Reihe vom Typus (4) definiert, die außer* e) *auch die Bedingungen* f) *erfüllt, und es sei andererseits $f(s)$ eine Dirichletsche Reihe der Gestalt (1), deren Koeffizienten a_n mit den $b_\varkappa$ und $l_\varkappa$ von $(1-s)$ durch die Beziehungen (5) zusammenhängen. Dann besteht zwischen den Funktionen $f(s)$ und $g(1-s)$ die Funktionalgleichung (2).*

3. Aus Satz 3 ergibt sich eine wichtige Folgerung für die Riemannsche -Funktion selbst.

Man setze nämlich in der Dirichletschen Reihe (3) alle $l_n \geqq 1$ oraus, es sei mithin $g(1-s)$ eine Dirichletsche Reihe des oft unterichten Typus

$$g(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n (1-s)} \qquad (\lambda_n = \log l_n \geqq 0). \tag{6}$$

esteht nun zwischen $g(1-s)$ und einer Funktion $f(s)$, die den Voraustzungen a), b) und c) genügt, die Beziehung (2), so ist nach Satz 3 egen e) und g)

$$l_1 = 1, \quad l_2 = 2, \ldots, l_n = n, \ldots$$

$$b_n = b_1, \quad a_n = b_1,$$

ithin ist

$$g(1-s) = b_1 \zeta(1-s). \quad f(s) = b_1 \zeta(s).$$

Ist also $g(1-s)$ eine Dirichletsche Reihe vom Typus (6), so ist s auf einen konstanten Faktor wieder die ζ-Funktion die einzige, die en Bedingungen a), b), c) *und der Funktionalgleichung (2) genügt.*

(1909), S. 475–478. Im folgenden wird übrigens die Kenntnis dieser Eigenschaft r Reihe (4) nicht vorausgesetzt, sondern ein neuer Beweis für ihre Fortsetzbarkeit gegeben.

§ 2.

Notwendige Bedingungen für das Bestehen der Funktionalgleichung; Beweis von Satz 3.

1. Setzt man

$$G(s+2) = f(s+2)\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\pi^{-s+\frac{1}{2}},$$

so ist nach Satz 2 der 1. Mtlg. mit Rücksicht auf die Voraussetzung

$$G(s+2) = \int_0^\infty x^{s-1}\varphi(x)\,dx,$$

für $-1 < \sigma < 0$, wobei

$$\varphi(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}(\cos 2\pi n x - 1) \tag{7}$$

gesetzt ist.

Substituiert man wieder s für $s+2$, so erhält man nach einfachen Umformungen (vgl. Formel (17) des § 2 der 1. Mtlg.)

$$G(s) = \frac{-4\pi^2}{(s-2)(s-1)}f(s)\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\pi^{-s+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-4\pi^2}{(s-2)(s-1)}g(1-s) = \int_0^\infty x^{s-3}\varphi(x)\,dx;$$

für $1 < \sigma < 2$, mithin

$$g(1-s) = -(s-2)(s-1)\int_0^\infty x^{s-3}\frac{\varphi(x)}{4\pi^2}dx,$$

unter $g(1-s)$ die durch die Beziehung (2) definierte Funktion verstanden.

Außerdem ergibt sich aus Hilfssatz 1 und 2 der 1. Mtlg. (vgl. Formel (19) der 1. Mtlg.)

$$\frac{\varphi(x)}{4\pi^2} = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\frac{5}{4}-i\infty}^{\frac{5}{4}+i\infty} x^{-s+2}\frac{g(1-s)}{(s-2)(s-1)}ds. \tag{7'}$$

Da die Dirichletsche Reihe (3) in der Halebene $\sigma < -\alpha$ absolut konvergent vorausgesetzt wurde (vgl. Bedingung d'')), so bleibt $g(1-s)$ in jedem Streifen $\sigma_0 \leqq \sigma \leqq -\alpha - \delta$ unterhalb einer festen von s unabhängigen Schranke. Aus Hilfssatz 1 der 1. Mtlg. ergibt sich daher ebenso wie beim Beweise von Satz 1 der 1. Mtlg. die für $\sigma < -\alpha$ absolut konvergente Integraldarstellung:

$$g(1-s) = (s-2)(s-1)\int_0^\infty x^{s-3}\psi(x)\,dx, \tag{8}$$

wobei

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\beta-\infty i}^{-\beta+\infty i} x^{-s+2}\,\frac{g(1-s)}{(s-2)(s-1)}\,ds \qquad (\beta > \alpha)$$

zu setzen ist. Indem man dieses Integral vermittelst des Residuenkalküls mit dem Integral (7′) in Verbindung bringt (vgl. dieselbe Überlegung beim Beweise von Satz 1 der 1. Mtlg.), schließt man:

$$\psi(x) = R(x) - \frac{\varphi(x)}{4\pi^2}. \tag{9}$$

Hierbei bedeutet $R(x)$ das Residuum der Funktion

$$-x^{-s+2}\,\frac{g(1-s)}{(s-2)(s-1)} \tag{10}$$

im Streifen $-\beta \leqq \sigma \leqq \frac{5}{4}$; $R(x)$ ist also, da nach Voraussetzung **a)** $f(s)$ und somit auch die Funktion (10) dort nur endlich viele Pole enthält, von der Gestalt

$$R(x) = \sum_{\nu=1}^{m} x^{-s_\nu+2}\left(A_{q_\nu-1}^{(\nu)}\log^{q_\nu-1}x + \ldots + A_1^{(\nu)}\log x + A_0^{(\nu)}\right), \tag{11}$$

wenn mit $s_1, \ldots, s_\nu, \ldots, s_m$ die Pole der Funktion (10) im Streifen $-\beta \leqq \sigma \leqq \frac{5}{4}$ und mit $q_1, \ldots, q_\nu, \ldots, q_m$ ihre Ordnungszahlen bezeichnet werden. Demnach ist $R(x)$ eine für positive Werte von x reguläre analytische Funktion.

2. Nunmehr suchen wir für $g(1-s)$ eine zweite im Bereich $\sigma < -\alpha$ absolut konvergente Integraldarstellung der Form (8), indem wir die nach Voraussetzung **d″)** für $\sigma < -\alpha$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe (3) umformen.

Es bezeichne $B(x)$ eine Treppenfunktion, die durch die Beziehungen

$$\begin{aligned}
&B(x) = 0 && \text{für} \quad 0 \leqq x < l_1,\\
&B(x) = b_1 && \text{für} \quad l_1 \leqq x < l_2,\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&B(x) = b_1 + b_2 + \ldots + b_m && \text{für} \quad l_m \leqq x < l_{m+1}
\end{aligned}$$

definiert sei. Dann leitet man aus der Dirichletschen Reihe (3) durch partielle Summation ebenso wie beim Beweise von Satz 1 das für $\sigma < -\alpha$ absolut konvergente Integral

$$g(1-s) = -(s-1)\int_0^\infty x^{s-2}\,B(x)\,dx$$

ab. Setzt man

$$B_1(x) = \int_0^x B(u)\,du,$$

das heißt

$$= 0 \qquad (\text{für } 0 \leqq x < l_1),$$

$$(12) \qquad = \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu (x - l_\nu) \qquad (\text{für } l_m \leqq x < l_{m+1}),$$

so erhält man nach nochmaliger partieller Integration für $\sigma < -\alpha$

$$(13) \qquad g(1-s) = (s-2)(s-1)\int_0^\infty x^{s-3} B_1(x)\, dx.$$

Vergleicht man diese Integraldarstellung mit (8), so ergibt sich in Verbindung mit (9) nach Hilfssatz 2 (1. Mtlg.)

$$(14) \qquad B_1(x) = \psi(x) = R(x) - \frac{\varphi(x)}{4\pi^2}.$$

3. Da $\varphi(x)$ nach Formel (7) eine gewöhnliche Kosinusreihe ist, so hat $\varphi(x)$ die beiden Eigenschaften

$$(15) \qquad \varphi(x+1) = \varphi(x), \quad \varphi(1-x) = \varphi(x).$$

Demnach ist für $x \geqq 0$

$$B_1(x+1) - B_1(x) = R(x+1) - R(x).$$

Andererseits ist wegen (12), wenn außer der ganzen Zahl m noch eine ganze Zahl k durch die Beziehungen

$$(16) \qquad l_m \leqq x < l_{m+1}, \quad l_{m+k} \leqq x+1 < l_{m+k+1}$$

definiert wird:

$$(17) \qquad B_1(x+1) - B_1(x) = x \sum_{\nu=m+1}^{m+k} b_\nu + \sum_{\nu=1}^{m+k} b_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{m+k} b_\nu l_\nu$$

(m und k hängen also zunächst beide von x ab).

Die Kurve, die die Summe rechter Hand als Funktion von x darstellt, ist im allgemeinen (vgl. Formel (31) der 1. Mtlg.) ein gebrochener geradliniger Polygonzug, dessen Ecken in den Punkten mit den Abszissen l_m und $l_m - 1$ ($m = 1, 2, \ldots \to \infty$) liegen. Andererseits ist $R(x+1) - R(x)$ wegen (11) eine für positive x reguläre analytische Funktion, besitzt mithin für $x > 0$ einen stetigen Differentialquotienten erster Ordnung. Daraus folgt aber, daß $B_1(x+1) - B_1(x)$ eine gewöhnliche Linearfunktion ist, also:

$$(18) \qquad B_1(x+1) - B_1(x) = R(x+1) - R(x) = ax + b,$$

$$R(x) = \frac{a}{2} x^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right) x + p(x),$$

wo $p(x)$ eine periodische Funktion mit der Periode 1 bedeutet. Aus Formel (11) ersieht man aber, daß $p(x)$ nur gleich einer Konstanten

sein kann; da aber wegen (7), (12) und (14) $R(x)$ für $x=0$ verschwindet, so ist sogar $p(x)=0$, folglich

$$R(x)=\frac{a}{2}x^2+\left(b-\frac{a}{2}\right)x \quad [5]). \tag{19}$$

Aus (17) und (18) folgt ferner

$$\sum_{\nu=m+1}^{m+k} b_\nu = a, \tag{20}$$

$$\sum_{\nu=1}^{m+k} b_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{m+k} b_\nu l_\nu = b, \tag{21}$$

wo unter m und k wieder die durch die Beziehung (16) definierten ganzen Zahlen zu verstehen sind.

4. Nunmehr soll aus (20) geschlossen werden, daß die b_n und l_n den Bedingungen **e)** genügen.

Und in der Tat durchläuft der Punkt x von rechts nach links das Intervall $l_m+\varepsilon \geqq x \geqq l_m-\varepsilon$ $(l_{m+1}>l_m+\varepsilon)$, so wird nach den Relationen (16) die untere Summationsgrenze in $\sum_{\nu=m+1}^{m+k} b_\nu$ sich um 1 erniedrigen, wenn x durch den Punkt $x=l_m$ hindurchgeht; zu dieser Summe wird demnach der Summand b_m hinzukommen. Soll sie trotzdem gleich a bleiben, so muß sich zum Ausgleich die obere Summationsgrenze auch um 1 erniedrigen, das heißt wenn x durch den Punkt l_m hindurchgeht, so muß wegen (16) auch $x+1$ durch l_{m+k} hindurchgehen, mithin

$$l_{m+k}=l_m+1, \tag{22}$$

und somit wird die Summe um b_{m+k} vermindert werden. Da sie aber um den gleichen Summand vermindert wird, der durch die Abnahme der unteren Summationsgrenze hinzugekommen ist, so folgt

$$b_{m+k}=b_m. \tag{23}$$

Andererseits gilt umgekehrt: Ist $l_p>1$, so ist auch l_p-1 eine der Zahlen l_n, die mit l_m bezeichnet werde, und es ergibt sich $b_m=b_p$. Dies zeigt man, indem man den Punkt $x+1$ das Intervall $l_p+\varepsilon \geqq x \geqq l_p-\varepsilon$

[5]) Indem man diesen Ausdruck für das Residuum $R(x)$ mit (11) vergleicht, erkennt man bereits, daß die Funktion (10) in dem Bereiche $\sigma \leqq \frac{5}{4}$ höchstens $\left(\text{das heißt im Falle } a\neq 0,\ b-\frac{a}{2}\neq 0\right)$ in den Punkten $s=0$ und $s=1$ Pole erster Ordnung hat. Demnach besitzt $f(s)$ (vgl. Formel (2)) höchstens im Punkte $s=1$ einen Pol erster Ordnung. Doch wird diese Eigenschaft von $f(s)$ im folgenden nicht benutzt.

von rechts nach links durchlaufen läßt und bemerkt, daß, wenn der Punkt $x+1$ den Punkt l_p passiert, auch x durch den Punkt l_m hindurchgehen muß.

Dann folgt aber unmittelbar, daß diejenigen k Zahlen $l_\varkappa$, die $\leqq 1$ sind, wegen (22) die Zahlen l_n bereits eindeutig bestimmen, daß daher die Zahlen l_n und wegen (23) auch die Koeffizienten b_n die Bedingungen e) erfüllen. Mithin ergibt sich k als feste Zahl, die nicht mehr von x (vgl. Formel (16)) abhängt.

Es ergibt sich ferner aus (20) und (21), indem man $m=0$, d. h. $0<x<l_1$ wählt,

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa = a, \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa (1-l_\varkappa) = b. \tag{24}$$

5. Um zu zeigen, daß zwischen den $l_\varkappa$ und $b_\varkappa$ auch die unter **f)** behaupteten Beziehungen bestehen, benutzen wir die zweite der beiden Eigenschaften (15) der Kosinusreihe (7): $\varphi(x)=\varphi(1-x)$ für $0<x<1$

Aus ihr folgt um so mehr für $0<x<\frac{1}{2}$

$$B_1(1-x)-B_1(x)=R(1-x)-R(x),$$

oder indem man die Formeln (12) und (19) benutzt und die ganzen Zahlen ξ und m, die von x abhängen, durch die Beziehungen

$$l_m \leqq x < l_{m+1}, \qquad l_{\xi-1} < 1-x \leqq l_\xi$$

definiert,

$$\begin{aligned} b(1-2x) &= \sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu ((1-x)-l_\nu) - \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu (x-l_\nu) \\ &= -\Big(\sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu + \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu\Big) x + \sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{\xi-1} b_\nu l_\nu, \end{aligned} \tag{25}$$

folglich

$$\sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu + \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu = 2b, \qquad \sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{\xi-1} b_\nu l_\nu = b. \tag{26}$$

Aus (26) lassen sich nunmehr die Beziehungen **f)** leicht ableiten: Denn durchläuft x von rechts nach links das Intervall $l_m+\varepsilon \geqq x \geqq l_m-\varepsilon$, so nimmt $\sum_{\nu=1}^{m} b_\nu$ um b_m ab, wenn x den Punkt l_m passiert. Soll also die Summe (26) konstant bleiben, so muß $1-x$ durch einen Punkt l_ξ hindurchgehen, wenn x den Punkt l_m passiert, und es muß $b_m = b_\xi$ sein, das heißt zu jeder Zahl $l_m < \frac{1}{2}$ gehört eine Zahl $l_\xi = 1-l_m > \frac{1}{2}$.

Indem man $1-x$ das Intervall $l_\xi - \varepsilon \leqq x \leqq l_\xi + \varepsilon$ durchlaufen läßt, zeigt man, daß sich umgekehrt jeder Zahl $l_\xi > \frac{1}{2}$ eine Zahl $l_m = 1-l_\xi < \frac{1}{2}$ zuordnen läßt, deren zugehörige Koeffizienten b_ξ bzw. b_m einander gleich sind.

Mithin folgt aber, wenn wieder $l_k = 1$ gesetzt wird (vgl. Anm. [3]):

I. Im Falle $k = 2q+1$

$l_\varkappa < \frac{1}{2}$ für $1 \leqq \varkappa \leqq q$, $\quad \frac{1}{2} < l_\varkappa < 1$ für $q+1 \leqq \varkappa \leqq 2q = k-1$.

II. Im Falle $k = 2q+2$

$_{+1} = \frac{1}{2}$, $\quad l_\varkappa < \frac{1}{2}$ für $1 \leqq \varkappa \leqq q$, $\quad \frac{1}{2} < l_\varkappa < 1$ für $q+2 \leqq \varkappa \leqq 2q+1 = k-1$,

nd in beiden Fällen

$$l_\varkappa = 1 - l_{k-\varkappa}, \qquad b_\varkappa = b_{k-\varkappa} \qquad \text{für} \quad 1 \leqq \varkappa \leqq k-1.$$

Damit sind die Behauptungen **f)** bewiesen.

6. Um endlich nachzuweisen, daß die Koeffizienten a_n mit den $b_\varkappa$ nd $l_\varkappa$ durch die Beziehungen (5) zusammenhängen, berücksichtigen wir. aß aus den Beziehungen (7) und (14), das heißt aus

$$\varphi(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}(\cos 2\pi n x - 1) = 4\pi^2 (R(x) - B_1(x)),$$

ch die Größen $\frac{2a_n}{n^2}$ als Fourierkoeffizienten der Entwicklung von $\pi(R(x) - B_1(x))$ in eine Kosinusreihe ergeben; man erhält daher

$$7) \qquad a_n = 4\pi^2 n^2 \int_0^1 (R(x) - B_1(x)) \cos 2\pi n x \, dx \quad (n = 1, 2, \ldots \to \infty).$$

Es ist nun aber wegen (19)

$$8) \qquad \int_0^1 R(x) \cos 2\pi n x \, dx = \int_0^1 \left(\frac{a}{2}x^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)x\right) \cos 2\pi n x \, dx = \frac{a}{4\pi^2 n^2}.$$

ndererseits ist, wenn man für $B_1(x)$ die Beziehung (12) benutzt und rübergehend

$$\beta_0 = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu = \beta_m; \qquad \gamma_0 = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu l_\nu = \gamma_m$$

tzt,

$$\int_0^1 B_1(x) \cos 2\pi n x \, dx$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{k-1}{}' \left(\beta_\varkappa \int_{l_\varkappa}^{l_{\varkappa+1}} x \cos 2\pi n x \, dx - \gamma_\varkappa \int_{l_\varkappa}^{l_{\varkappa+1}} \cos 2\pi n x \, dx\right)$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{k-1}{}' \left\{\beta_\varkappa \left| \frac{l_{\varkappa+1} \sin 2\pi n l_{\varkappa+1} - l_\varkappa \sin 2\pi n l_\varkappa}{2\pi n} + \frac{\cos 2\pi n l_{\varkappa+1} - \cos 2\pi n l_\varkappa}{4\pi^2 n^2} \right| \right.$$

$$\left. - \gamma_\varkappa \frac{\sin 2\pi n l_{\varkappa+1} - \sin 2\pi n l_\varkappa}{2\pi n} \right\}$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{k-1} (l_\varkappa(\beta_{\varkappa-1} - \beta_\varkappa) - (\gamma_{\varkappa-1} - \gamma_\varkappa)) \frac{\sin 2\pi n l_\varkappa}{2\pi n}$$

$$+ (\beta_{k-1} l_k - \gamma_{k-1}) \frac{\sin 2\pi n l_k}{2\pi n}$$

$$+ \sum_{\varkappa=1}^{k-1} (\beta_{\varkappa-1} - \beta_\varkappa) \frac{\cos 2\pi n l_\varkappa}{4\pi^2 n^2} + \beta_{k-1} \frac{\cos 2\pi n l_k}{4\pi^2 n^2}$$

$$(29) \qquad = \frac{-1}{4\pi^2 n^2} \sum_{\varkappa=1}^{k-1} b_\varkappa \cos 2\pi n l_\varkappa + \frac{\beta_{k-1}}{4\pi^2 n^2}$$

(da $l_m(\beta_{m-1} - \beta_m) = -l_m b_m = \gamma_{m-1} - \gamma_m$, $l_k = 1$ ist). Mithin ergibt sich in Verbindung mit (27), (28) und (29)

$$a_n = \sum_{\varkappa=1}^{k-1} b_\varkappa \cos 2\pi n l_\varkappa + a - \sum_{\varkappa=1}^{k-1} b_\varkappa$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa \cos 2\pi n l_\varkappa$$

wegen (24).

Damit sind alle Behauptungen des Satzes 3 vollständig bewiesen.

§ 3.

Hinreichende Bedingungen für das Bestehen der Funktionalgleichung; Beweis von Satz 4.

1. Es sei $g(1-s)$ eine Dirichletsche Reihe vom Typus (4), die außer **e)** auch den Bedingungen **f)** genügt.

Wir gehen von der mindestens in der Halbebene $\sigma < -\alpha$ absolut konvergenten Integraldarstellung (13) für $g(1-s)$ aus, die man aus der Dirichletschen Reihe (3) ableitet, und verstehen unter $B_1(x)$ wieder die in Formel (12) definierte Funktion. Endlich setze man wieder

$$(30) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa = a, \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa (1 - l_\varkappa) = b$$

und bilde die Funktion

$$(31) \qquad \chi(x) = B_1(x) - \frac{a}{2} x^2 - \left(b - \frac{a}{2}\right) x.$$

Dann behaupten wir **erstens:**

$$(32) \qquad \chi(x) = \chi(x+1) \qquad \text{für } x > 0.$$

Man erhält nämlich in Verbindung mit (17)

$$\chi(x+1)-\chi(x)=B_1(x+1)-B_1(x)-ax-b$$

33) $$=x\sum_{\nu=m+1}^{m+k}b_\nu+\sum_{\nu=1}^{m}b_\nu+\sum_{\nu=m+1}^{m+k}b_\nu(1-l_\nu)-ax-b,$$

obei wegen der Voraussetzung e) aus $l_m\leqq x<l_{m+1}$

$$l_{m+k}\leqq x+1<l_{m+k+1}$$

lgt. Es sei $m=\mu k+\varkappa$, dann ist wegen (23) und (30) einerseits

34) $$\sum_{\nu=m+1}^{m+k}b_\nu=\sum_{\nu=\varkappa+1}^{k+\varkappa}b_\nu=\sum_{\nu=\varkappa+1}^{k}b_\nu+\sum_{\nu=1}^{\varkappa}b_\nu=a,$$

ndererseits

$$\sum_{\nu=1}^{m}b_\nu=\sum_{\varrho=1}^{\mu}\sum_{\iota=1}^{k}b_\iota+\sum_{\iota=1}^{\varkappa}b_\iota=\mu a+\sum_{\iota=1}^{\varkappa}b_\iota,$$

$$\sum_{\nu=m+1}^{m+k}b_\nu(1-l_\nu)=\sum_{\nu=\varkappa+1}^{k+\varkappa}b_\nu(1-\mu-l_\nu)$$

$$=-\mu a+\sum_{\nu=\varkappa+1}^{k}b_\nu(1-l_\nu)+\sum_{\nu=1}^{\varkappa}b_\nu(1-1-l_\nu)$$

$$=-\mu a-\sum_{\nu=1}^{\varkappa}b_\nu+\sum_{\nu=1}^{k}b_\nu(1-l_\nu).$$

as ergibt aber wegen (30)

35) $$\sum_{\nu=1}^{m}b_\nu+\sum_{\nu=m+1}^{m+k}b_\nu(1-l_\nu)=\sum_{\nu=1}^{k}b_\nu(1-l_\nu)=b,$$

us (33), (34) und (35) folgt die Behauptung (32).

2. Wir behaupten zweitens:

36) $$\chi(x)=\chi(1-x)\qquad\text{für } 0<x<1.$$

Offenbar genügt es, diese Behauptung für $0<x<\frac{1}{2}$ zu beweisen. s ergibt sich in Verbindung mit (25)

$$\chi(1-x)-\chi(x)=B_1(1-x)-B_1(x)-b(1-2x)$$

37) $$=-\Big(\sum_{\nu=1}^{\xi-1}b_\nu+\sum_{\nu=1}^{m}b_\nu\Big)x+\sum_{\nu=1}^{\xi-1}b_\nu-\sum_{\nu=m+1}^{\xi-1}b_\nu l_\nu+b(2x-1),$$

obei die ganzen Zahlen m und ξ durch die Beziehungen

$$l_m\leqq x<l_{m+1},\qquad l_{\xi-1}<1-x\leqq l_\xi$$

bestimmt sind. Nach Voraussetzung ist dann aber

$$\xi = k - m; \qquad l_\xi = 1 - l_m; \qquad b_\xi = b_m;$$

mithin wegen $\sum_{\nu=1}^{m} b_\nu = \sum_{\nu=1}^{m} b_{k-\nu} = \sum_{\nu=k-m}^{k-1} b_\nu$,

$$\sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu + \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu = \sum_{\nu=1}^{k-m-1} b_\nu + \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu = \sum_{\nu=1}^{k-1} b_\nu. \tag{38}$$

Andererseits ist aber wegen **f)** für $1 \leqq m \leqq k-1$

$$\sum_{\nu=1}^{m} b_\nu = \sum_{\nu=1}^{m} [b_\nu (1 - l_\nu) + b_\nu l_\nu] = \sum_{\nu=1}^{m} [b_\nu (1 - l_\nu) + b_{k-\nu}(1 - l_{k-\nu})]$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu (1 - l_\nu) + \sum_{\nu=k-m}^{k-1} b_\nu (1 - l_\nu). \tag{39}$$

Setzt man $m = k-1$, so ergibt sich wegen $l_k = 1$

$$\sum_{\nu=1}^{k-1} b_\nu = 2 \sum_{\nu=1}^{k-1} b_\nu (1 - l_\nu) = 2 \sum_{\nu=1}^{k} b_\nu (1 - l_\nu) = 2b,$$

mithin in Verbindung mit (38)

$$-\left(\sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu + \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu\right) = -2b. \tag{40}$$

Es ist ferner

$$\sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{\xi-1} b_\nu l_\nu = \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu + \sum_{\nu=m+1}^{k-m-1} b_\nu (1 - l_\nu),$$

folglich, wenn man den Wert für $\sum_{\nu=1}^{m} b_\nu$ aus (39) einsetzt,

$$\sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{\xi-1} b_\nu l_\nu = \sum_{\nu=1}^{k-1} b_\nu (1 - l_\nu) = \sum_{\nu=1}^{k} b_\nu (1 - l_\nu) = b. \tag{41}$$

Aus (40) und (41) folgt aber wegen (37) die Behauptung (36).

3. Nunmehr betrachten wir das Integral

$$J(s) = \int_0^\infty x^{s-3} \chi(x)\, dx, \tag{42}$$

wobei $\chi(x)$ die durch Formel (31) definierte Funktion ist. Wegen (32
ist $\chi(x)$ als periodische Funktion beschränkt; außerdem ist $B_1(x) =$
für $0 \leqq x < l_1$, daher bleibt $\frac{\chi(x)}{x}$ unterhalb einer festen Schranke, wenn

egen 0 abnimmt. Das Integral (42) ist demnach in dem Streifen $1 < \sigma < 2$ solut konvergent.

Wir behaupten weiter: Das Integral $(s-2)(s-1)J(s)$ ist die ana- tische Fortsetzung in dem Streifen $1 < \sigma < 2$ des Integrals (13), das die unktion $g(1-s)$ nur für $\sigma < -\alpha$ darstellt. Es ist nämlich für $1 < \sigma < 2$

$$J(s) = \int_0^1 x^{s-3} B_1(x)\,dx - \int_0^1 x^{s-3}\left(\frac{a}{2}x^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)x\right)dx + \int_1^\infty x^{s-3}\chi(x)\,dx$$

3) $$= -\frac{a}{2s} - \left(b - \frac{a}{2}\right)\frac{1}{s-1} + \int_0^1 x^{s-3} B_1(x)\,dx + \int_1^\infty x^{s-3}\chi(x)\,dx.$$

In dieser Form konvergieren aber wegen $B_1(x) = 0$ für $0 \leqq x < l_1$ e Integrale rechter Hand von (43) in der ganzen Halbebene $\sigma < 2$. peziell wird für $\sigma < -\alpha < 0$

$$J(s) = -\frac{a}{2s} - \left(b - \frac{a}{2}\right)\frac{1}{s-1} + \int_0^1 x^{s-3} B_1(x)\,dx + \int_1^\infty x^{s-3} B_1(x)\,dx$$

$$- \int_1^\infty x^{s-3}\left(\frac{a}{2}x^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)x\right)dx$$

$$= \int_0^\infty x^{s-3} B_1(x)\,dx.$$

araus folgt aber wegen (13), daß $(s-2)(s-1)J(s)$ die analytische ortsetzung von $g(1-s)$ in dem Streifen $1 < \sigma < 2$ ist.

Die Beziehung (43) zeigt außerdem, daß $g(1-s) = (s-2)(s-1)J(s)$ der ganzen Halbebene $\sigma < 2$ regulär ist und nur an der Stelle $s = 0$ nen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $-a$ hat.

4. Aus der Beziehung $\chi(x+1) = \chi(x)$ folgt, daß sich $\chi(x)$ in eine igonometrische Reihe

$$\chi(x) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}{}' (A_n \cos 2\pi n x + A_n' \sin 2\pi n x)$$

twickeln läßt. Wegen $\chi(x) = \chi(1-x)$ müssen aber sämtliche Koeffi- enten $A_n' = 0$ sein. Da endlich $\chi(x)$ für $x = 0$ verschwindet, so läßt ch die trigonometrische Reihe auch in der Form

$$\chi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\cos 2\pi n x - 1)$$

chreiben, wobei der Fourierkoeffizient

$$A_n = 2\int_0^1 \chi(x)\cos 2\pi n x\,dx \qquad (n \geqq 1)$$

$$= 2\int_0^1 B_1(x)\cos 2\pi n x\,dx - 2\int_0^1 \left(\frac{a}{2}x^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)x\right)\cos 2\pi n x\,dx$$

ist. Diese Integrale sind bereits im vorigen Paragraphen, Formel (28) und (29), berechnet worden, und zwar ergab sich dort

$$A_n = \frac{-2}{4\pi^2 n^2} \sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa \cos 2\pi n l_\varkappa .$$

Man setze die Summe rechter Hand gleich ihrem der Voraussetzung g) Formel (5) entnommenen Wert a_n, dann erhält man für $\chi(x)$ die Fourierreihe

$$\chi(x) = \frac{-2}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} (\cos 2\pi n x - 1),$$

die wegen $|a_n| \leqq \sum_{\varkappa=1}^{k} |b_\varkappa|$ (vgl. Formel (5)) absolut und gleichmäßig konvergiert, mithin wegen $\chi(x) = \chi(x+1)$ die Funktion $\chi(x)$ für alle positiven Werte von x darstellt.

Setzt man, um mit Formel (15) aus Satz 2 der 1. Mtlg. in Übereinstimmung zu bleiben,

$$-4\pi^2 \chi(x) = \varphi(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} (\cos 2\pi n x - 1),$$

so erhält man unter Berücksichtigung von (42) in dem Streifen $1 < \sigma < 2$

$$g(1-s) = (s-2)(s-1) J(s) = \frac{-(s-2)(s-1)}{4\pi^2} \int_0^{\infty} x^{s-3} \varphi(x) dx$$

und hieraus folgt in Verbindung mit Satz 2 und Formel (17) und (20) der 1. Mtlg.

$$g(1-s) = f(s) \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \pi^{-s+\frac{1}{2}},$$

unter $f(s)$ die Dirichletsche Reihe (1) dieser Mtlg. verstanden.

Da, wie oben gezeigt wurde, $g(1-s)$ im Bereiche $\sigma < 2$ nur für $s = 1$ einen Pol erster Ordnung hat, ebenso wie $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ rechter Hand von (2), so kann $f(s)$ für $\sigma < 2$ höchstens im Punkte $s = 1$ einen Pol haben, da dort die Funktion $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}$ verschwindet. In der Halbebene $\sigma \geqq 2$ ist $f(s)$ nach Voraussetzung c), mithin auch $g(1-s)$, regulär. Hiermit ist Satz 4 vollständig bewiesen.

§ 4.

Über eine der Riemannschen verwandte Funktionalgleichung.

1. Satz 5. *Es sei* $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ *eine Dirichletsche Reihe, die für* >1 *absolut konvergiert. Setzt man*

4) $$G(s+2)=f(s+2)\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)}\pi^{-s+\frac{1}{2}},$$

5) $$\varphi(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}\sin 2\pi n x,$$

ist für $-1<\sigma<0$

6) $$G(s+2)=\int_0^{\infty}x^{s-1}\varphi(x)\,dx.$$

Dieser Satz ist ein Analogon zu Satz 2 der 1. Mtlg.; sein Beweis gibt sich ebenso aus Formel (10) der 1. Mtlg., wie dort der Satz 2 aus r entsprechenden Formel (9).

Auch hier empfiehlt es sich, wie in der 1. Mtlg., die Formeln (44) d (46) umzuformen, indem man s für $s+2$ substituiert. Setzt man ßerdem noch

7) $$g(1-s)=\frac{(s-2)(s-1)}{-4\pi^2}G(s)=f(s)\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)}\pi^{-s+\frac{1}{2}},$$

folgt aus (46) die im Streifen $1<\sigma<2$ absolut konvergente Integral-rstellung

8) $$g(1-s)=\frac{(s-2)(s-1)}{-4\pi^2}\int_0^{\infty}x^{s-3}\varphi(x)\,dx.$$

Ebenso wie in Formel (19) der 1. Mtlg. ergibt sich, da nach Hilfs-tz 2 die Funktion $G(s)$ sich nur auf eine Weise durch ein Integral der estalt (46) darstellen läßt, aus Hilfssatz 1 (1. Mtlg.) für $\varphi(x)$ außer r Reihe (45) noch die Integraldarstellung

9) $$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{5}{4}-i\infty}^{\frac{5}{4}+i\infty}x^{-s+2}G(s)\,ds,$$

chdem man gezeigt hat, daß im Streifen $1<\sigma<\frac{3}{2}$ die Funktion $G(s)$ e Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 erfüllt.

2. Satz 6. *Es sei $f(s)$ eine für alle Werte der komplexen Veränderlichen s definierte analytische Funktion, die die Voraussetzungen* **a)**, **b)** *und* **c)** *von Satz 3 erfüllt.*

d‴) *$g(1-s)$ bezeichne die in Formel (47) definierte Funktion und lasse sich durch eine für $\sigma < -\alpha$ $(\alpha > 0)$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe*

$$g(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{l_n^{1-s}} \qquad (0 < l_1 < l_2 < \ldots) \tag{3}$$

darstellen.

Dann erfüllt die Dirichletsche Reihe (3) die Bedingungen:

e) *Sind*

$$l_1 < l_2 < \ldots < l_k = 1 \ ^{6})$$

sämtliche der Zahlen l_n, die $\leqq 1$ sind, so ist, wenn $n = \mu k + \varkappa$ $(\mu \geqq 1,\ 1 \leqq \varkappa \leqq k)$ gesetzt wird,

$$l_n = \mu + l_\varkappa, \qquad b_n = b_\varkappa,$$

mithin ist die Dirichletsche Reihe (3) von der Gestalt

$$g(1-s) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{b_\varkappa}{(\mu + l_\varkappa)^{1-s}}. \tag{4}$$

f′) *Außerdem ist für $1 \leqq \varkappa \leqq k-1$* [7])

$$l_{k-\varkappa} = 1 - l_\varkappa; \qquad b_{k-\varkappa} = -b_\varkappa, \qquad b_k = 0.$$

g′) *Die Koeffizienten a_n der Dirichletschen Reihe (1) sind mit den $b_\varkappa$ und $l_\varkappa$ durch die Beziehungen verknüpft:*

$$a_n = \sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa \sin 2\pi n l_\varkappa. \tag{50}$$

Beweis. Aus der nur für $1 < \sigma < 2$ absolut konvergenten Integraldarstellung (48) für $g(1-s)$ geht man ebenso wie beim Beweise von Satz 1 der ersten Mitteilung und von Satz 3, indem man Hilfssatz 1 (1. Mtlg.) benutzt, zu der für $\sigma < -\alpha$ absolut konvergenten Integraldarstellung

$$g(1-s) = (s-2)(s-1)\int_0^{\infty} x^{s-3}\,\psi(x)\,dx \tag{51}$$

---

[6]) Vgl. Anm. [3]) S. 226.

[7]) In der Bedingung **f′)** ist offenbar enthalten, daß, wenn $k = 2q$ ist, $l_q = \frac{1}{2}$ und für den zugehörigen Koeffizienten $b_q = 0$ folgt.

er, wobei sich nach dem Cauchyschen Residuenkalkül in Verbindung t Formel (49)

$$2) \qquad \psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty} x^{-s+2}\frac{g(1-s)}{(s-2)(s-1)}ds = R(x) - \frac{\varphi(x)}{4\pi^2} \qquad (\beta > \alpha)$$

gibt. Hierbei bezeichnet $R(x)$ wieder das Residuum der Funktion

$$3) \qquad -x^{-s+2}\frac{g(1-s)}{(s-2)(s-1)}$$

Streifen $-\beta \leqq \sigma \leqq \frac{5}{4}$, für das man eine für positive Werte von x guläre analytische Funktion der Gestalt (11) erhält.

Andererseits ergibt sich ebenso wie beim Beweise von Satz 1 und 3 s der nach Voraussetzung d‴) für $\sigma < -\alpha$ absolut konvergenten irichletschen Reihe (3) die mindestens im Bereich $\sigma < -\alpha$ absolut nvergente Integraldarstellung

$$4) \qquad g(1-s) = (s-2)(s-1)\int_0^\infty x^{s-3} B_1(x)\,dx,$$

bei $B_1(x)$ durch Formel (12) definiert ist.

Durch Vergleichung von (51) und (54) ergibt sich nach Hilfssatz 2 r 1. Mtlg. (vgl. auch Formel (14) des § 2 der vorliegenden Mtlg.)

$$5) \qquad B_1(x) = \psi(x) = R(x) - \frac{\varphi(x)}{4\pi^2}$$

gen (52).

Nun ist aber $\varphi(x)$ wegen (45) als trigonometrische Reihe eine nktion mit der Periode 1. Man erhält daher

$$B_1(x+1) - B_1(x) = R(x+1) - R(x),$$

d aus dieser Beziehung folgt ebenso wie beim Beweise von Satz 3:

erstens, daß $R(x)$ gleich einem Polynom zweiten Grades der stalt (19) ist,

zweitens, daß die b_n und l_n, wie behauptet, die Bedingungen e) füllen.

Außerdem sind die in den Koeffizienten von $R(x)$ (siehe Formel (19)) ftretenden Größen a und b mit den $b_\varkappa$ und $l_\varkappa$ durch die Formel (24) rknüpft.

3. Um auch die Behauptung f′) zu beweisen, gehe man davon aus, ß nunmehr $\varphi(x)$ wegen (45) als Sinusreihe der Beziehung

$$\varphi(x) + \varphi(1-x) = 0$$

nügt. Man erhält also in Verbindung mit (55)

$$B_1(x) + B_1(1-x) = R(x) + R(1-x),$$

oder, indem man für $B_1(x)$ und $R(x)$ die Formeln (12) und (19) benutzt, für $0 < x < \frac{1}{2}$

$$\sum_{\nu=1}^{m} b_\nu (x - l_\nu) + \sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu (1 - x - l_\nu) = \frac{a}{2}(x^2 + (1-x)^2) + \left(b - \frac{a}{2}\right)(x + 1 -$$

$$(56) \qquad -\left(\sum_{\nu=m+1}^{\xi-1} b_\nu\right) x - \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu l_\nu + \sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu (1 - l_\nu) = a(x^2 - x) + b,$$

wobei m und ξ ganze von x abhängige Zahlen bedeuten, die durch die Beziehungen

$$(57) \qquad l_m \leqq x < l_{m+1}, \qquad l_{\xi-1} < 1 - x \leqq l_\xi$$

bestimmt sind. Da die linke Seite von (56) eine mindestens streckenweis lineare Funktion, die rechte Seite aber ein gewöhnliches Polynom zweiten Grades ist, so verschwindet der Koeffizient a, das heißt wegen (19

$$(58) \qquad R(x) = bx \ ^{8}).$$

Es folgt also zunächst

$$(59) \qquad \sum_{\nu=m+1}^{\xi-1} b_\nu = 0.$$

Geht nunmehr x von rechts nach links durch den Punkt l_m hindurch, so wächst die Summe linker Hand von (59) um b_m, soll sie trotzdem gleich Null bleiben, so muß gleichzeitig der Punkt $1 - x$ durch l_ξ hindurchgehen, und es muß $b_\xi = -b_m$ sein, mithin $l_\xi = 1 - l_m$.

Da offenbar auch umgekehrt x durch einen Punkt l_m hindurchgehen muß, wenn $1 - x$ einen Punkt l_ξ passiert, so folgt

$$l_\xi = l_{k-m} = 1 - l_m, \qquad b_\xi = b_{k-m} = -b_m.$$

Demnach ergibt sich für $k = 2q$

$$l_q = 1 - l_q = \tfrac{1}{2}.$$

Ist nunmehr $l_{q-1} < x < \frac{1}{2} < 1 - x < l_{q+1}$, so ist wegen (59)

$$\sum_{\nu=m+1}^{\xi-1} b_\nu = b_q = 0.$$

Aus (59) ergibt sich ferner für jedes ganzzahlige k, wenn man $m =$ (

das heißt $0 < x < l_1$ setzt, $\sum_{\nu=1}^{k-1} b_\nu = 0$. Andererseits ist aber wegen (24

---

[8]) Vergleicht man den Ausdruck (58) für $R(x)$ mit dem Ausdruck (11), so e kennt man ebenso wie in Anm. [5]) bereits an dieser Stelle, daß im Bereiche $\sigma < \frac{1}{4}$ d Funktion (53) höchstens im Punkte $s = 1$ einen Pol erster Ordnung hat. Mithin sin die Funktionen $g(1-s)$ und $f(s)$ (vgl. Formel (47)) überall im Endlichen regulä

nd wegen $a = \sum_{\nu=1}^{k} b_\nu = 0$, auch $b_k = 0$. Damit sind alle Behauptungen) bewiesen.

4. Um endlich noch **g′)** zu beweisen, berücksichtigen wir, daß aus 45) und (55), das heißt aus

$$\varphi(x) = 4\pi^2 (R(x) - B_1(x)) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \sin 2\pi n x,$$

ie Größen $\frac{2a_n}{n^2}$ sich als Fourierkoeffizienten der Entwicklung von $4\pi^2$ $R(x) - B_1(x)$) in eine Sinusreihe ergeben, daß mithin in Verbindung mit (58)

$$a_n = 4\pi^2 n^2 \int_0^1 (bx - B_1(x)) \sin 2\pi n x \, dx$$

t. Die Auswertung dieser Integrale führt nach ähnlichen Rechnungen ie am Schluß von § 2 auf die behaupteten Beziehungen (50), und damit t Satz 6 vollständig bewiesen.

5. Auch der Satz 6 läßt sich umkehren.

Satz 7. *Es sei* $g(1-s)$ *eine Dirichletsche Reihe der Gestalt*), *die außer* **e)** *auch die Bedingungen* **f′)** *erfüllt*[9]), *und* $f(s)$ *eine irichletsche Reihe der Gestalt* (1) *deren Koeffizienten* a_n *mit den* $b_\varkappa$ *nd* $l_\varkappa$ *von* $g(1-s)$ *durch die Beziehungen* (50) *zusammenhängen.*

Dann besteht zwischen $f(s)$ *und* $g(1-s)$ *die Funktionalgleichung* (47).

Beweis. Wie beim Beweise von Satz 4 gehe man von der aus der irichletschen Reihe abgeleiteten Integraldarstellung (54) für $g(1-s)$ us, die mindestens für $\sigma < -\alpha$ konvergent ist. Setzt man wieder

$$0) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa = a, \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa (1 - l_\varkappa) = b,$$

ist, wegen der Voraussetzung **f′)**, $a = 0$.

Man bilde die Funktion

$$1) \qquad \chi(x) = B_1(x) - bx = B_1(x) - \frac{a}{2} x^2 - \left(b - \frac{a}{2}\right) x.$$

a die b_n und l_n die Voraussetzung **e)** erfüllen, so folgt genau wie in § 3 gl. Formel (31) bis (5))

$$\chi(x) = \chi(x+1) \quad \text{für} \quad x > 0.$$

[9]) Aus den Bedingungen **e)** und **f′)** läßt sich (vgl. Landau, l. c. Anm. [4])) unttelbar folgern, daß wegen $\sum_{\nu=1}^{k} b_\nu = 0$ die Funktion $g(1-s)$ sich über die ganze ene fortsetzen läßt und überall im Endlichen regulär ist.

6. Andererseits behaupten wir:

$$\chi(x)+\chi(1-x)=0 \quad \text{für} \quad 0<x<1. \tag{62}$$

Offenbar genügt es, die Behauptung für $x \leqq \frac{1}{2}$ zu beweisen. In Verbindung mit (56) ergibt sich

$$\chi(x)+\chi(1-x)=-\Big(\sum_{\nu=m+1}^{\xi-1} b_\nu\Big)x-\sum_{\nu=1}^{m} b_\nu l_\nu+\sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu(1-l_\nu)-b \tag{63}$$

wobei die ganzen Zahlen m und ξ durch die Beziehungen (57) bestimmt sind. Aus der Voraussetzung f') folgt aber $\xi-1=k-m-1$ und weiter

$$\sum_{\nu=m+1}^{k-m-1} b_\nu=0. \tag{64}$$

Andererseits ist wegen f')

$$-\sum_{\nu=1}^{m} b_\nu l_\nu=\sum_{\nu=1}^{m} b_{k-\nu}(1-l_{k-\nu})=\sum_{\nu=k-m}^{k-1} b_\nu(1-l_\nu),$$

folglich

$$-\sum_{\nu=1}^{m} b_\nu l_\nu+\sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu(1-l_\nu)=\sum_{\nu=1}^{k-1} b_\nu(1-l_\nu)=\sum_{\nu=1}^{k} b_\nu(1-l_\nu)=b \tag{65}$$

wegen $l_k=1$ und wegen (60). Aus (63), (64) und (65) ergibt sich aber die behauptete Beziehung (62).

7. Nunmehr betrachte man — ebenso wie in § 3 — das Integral

$$J(s)=\int_0^\infty x^{s-3}\chi(x)\,dx, \tag{66}$$

unter $\chi(x)$ die in Formel (61) definierte Funktion verstanden. Als periodische Funktion ist $\chi(x)$ beschränkt. Außerdem bleibt, wegen $B_1(x)=0$ für $0 \leqq x<l_1$, auch der Quotient $\frac{\chi(x)}{x}$ beschränkt, wenn x gegen 0 abnimmt; daraus folgt, daß das Integral (66) im Streifen $1<\sigma<2$ absolut konvergiert.

Andererseits ist für $1<\sigma<2$

$$\begin{aligned} J(s)&=\int_0^1 x^{s-3}B_1(x)\,dx-b\int_0^1 x^{s-2}\,dx+\int_1^\infty x^{s-3}\chi(x)\,dx \\ &=\frac{-b}{s-1}+\int_0^1 x^{s-3}B_1(x)\,dx+\int_1^\infty x^{s-3}\chi(x)\,dx, \end{aligned} \tag{67}$$

und in dieser Gestalt konvergieren die Integrale rechter Hand von (67) offenbar in der ganzen Halbebene $\sigma<2$.

Aus (67) folgt ebenso wie im § 3, daß das Integral (66) die ana-tische Fortsetzung des nur für $\sigma < -\alpha$ absolut konvergenten Integrals $\int_0^\infty x^{s-3} B_1(x)\,dx$, mithin $(s-2)(s-1)J(s)$ wegen (54) die analytische ortsetsung von $g(1-s)$ ist. Wie sich aus (67) ergibt, ist aber $g(1-s)$ $=(s-2)(s-1)J(s)$ in der Halbebene $\sigma < 2$ überall im Endlichen egulär.

Aus der Beziehung $\chi(x+1)=\chi(x)$ folgt, daß sich $\chi(x)$ in eine igonometrische Reihe entwickeln läßt:

$$\chi(x) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos 2\pi n x + A_n' \sin 2\pi n x).$$

Aus $\chi(0)=0$, $\chi(x)+\chi(1-x)=0$ folgt aber $A_0=0$, $A_n=0$ für lle $n \geqq 1$. Andererseits ist

$$A_n' = 2\int_0^1 \chi(x) \sin 2\pi n x\,dx \qquad (n \geqq 1).$$

Indem man die Funktion (61) für $\chi(x)$ einsetzt, die Integration aus-ührt und nachher die Formeln (50) der Voraussetzung g') benutzt, er-ibt sich

$$A_n' = \frac{-2}{4\pi^2 n^2} \sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa \sin 2\pi n l_\varkappa = \frac{-2\,a_n}{4\pi^2 n^2};$$

nithin ist wegen $|a_n| \leqq \sum_{\varkappa=1}^{k} |b_\varkappa|$ die Fourierreihe

$$\chi(x) = \frac{-2}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \sin 2\pi n x$$

bsolut und gleichmäßig konvergent. Offenbar stimmt aber diese Reihe ür $\chi(x)$ mit der Reihe $-\frac{\varphi(x)}{4\pi^2}$ der Formel (45) aus Satz 5 überein. Die aus (66) gewonnene, im Streifen $1<\sigma<2$ absolut konvergente In-egraldarstellung von $g(1-s)=(s-2)(s-1)J(s)$ ist also mit dem ntegral (48) identisch. Von (48) können wir aber auf die Beziehung 47) zurückschließen, und damit ist bewiesen, daß zwischen $f(s)$ und $(1-s)$ die Funktionalgleichung (47) besteht.

Aus ihr folgt, daß $g(1-s)$ nicht nur, wie bisher bewiesen wurde, n der Halbebene $\sigma<2$, sondern überall im Endlichen regulär ist. Das leiche gilt offenbar auch von der Funktion $f(s)$.

Damit ist Satz 7 vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 19. August 1920.)

Darstellung total positiver Zahlen durch Quadrate.

Von

Carl Siegel in Göttingen.

Für den Hilbertschen Satz: „Jede total positive Zahl eines algebraischen Zahlkörpers läßt sich als Summe von vier Quadratzahlen desselben Körpers darstellen“ ist bisher kein Beweis publiziert worden. Es sind nur spezielle Fälle des Satzes erledigt; und andererseits weiß man einiges über die Darstellbarkeit total positiver Zahlen durch Quadrate von Körperzahlen überhaupt. Mir sind bekannt geworden die beiden unten zitierten Notizen von O. Meißner, in denen quadratische und kubische Zahlkörper betrachtet werden, und eine von Landau veröffentlichte Bemerkung von I. Schur, der den Hilbertschen Satz für die total positive Zahl -1 in einem Kreiskörper beweist. Außerdem hat Landau den Hilbertschen Satz für quadratische Körper, sowie die Darstellbarkeit der total positiven Zahlen durch endlich viele Quadrate bewiesen.

Ich betrachte den Satz als spezielles Ergebnis einer allgemeinen Theorie der quadratischen Formen, deren Koeffizienten und Variable in einem algebraischen Zahlkörper liegen. Dementsprechend werden in § 1 die wichtigsten Begriffe der Arithmetik quadratischer Formen aus dem Gebiete der rationalen Zahlen auf Zahlkörper übertragen; §§ 2, 3 enthalten den eigentlichen Beweis der Hilbertschen Behauptung. Eine unmittelbare Folgerung ist die Lösung einer Verallgemeinerung des Waringschen Problems auf Zahlkörper; § 4 gibt einige weitere Anwendungen. In § 5 entwickle ich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Darstellbarkeit durch 2 oder 3 Quadrate.

Die Frage, ob bei der Darstellung einer *ganzen* total positiven Zahl als Summe von 4 Quadraten die Nenner in den Basen stets aus einem nur vom Körper abhängigen endlichen Wertevorrat gewählt werden können, bzw. in welchen Körpern dies zutrifft, kann ich nicht entscheiden. Ich kann nur zeigen (in § 6), und zwar mit ganz elementarer Methode, daß

eschränkte Nenner im Fall eines *total reellen* Körpers bei der Zerlegung endlich viele (anstatt in 4) Quadrate gefordert werden können.

Zur Erleichterung stelle ich hier für den Leser die wichtigen Sätze er höheren Arithmetik zusammen, die im folgenden gebraucht werden:

I. Hilbert-Furtwänglersches quadratisches Reziprozitätsgesetz:

Sind μ und ν zwei ganze Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers K, ist

$$\prod_{\mathfrak{w}} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = 1,$$

o das Produkt über alle Primideale $\mathfrak{w}$ aus K und die Symbole $1^{(\mathfrak{i})}$ zu rstrecken ist.

II. Sind μ und ν zwei ganze Zahlen aus K und ist $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1$, o $\mathfrak{w}$ alle Primideale in K und die Symbole $1^{(\mathfrak{i})}$ durchläuft, so ist ν elativnorm einer Zahl des Körpers $K(\sqrt{\mu})$. Dann hat also auch die iophantische Gleichung

$$\mu x^2 + \nu y^2 = z^2$$

ine Lösung in ganzen Zahlen x, y, z aus K, die nicht alle 0 sind.

III. Wenn $\mathfrak{q}$ ein Primideal des Körpers K ist, das nicht in der elativdiskriminante des relativquadratischen Körpers $K(\sqrt{\mu})$ aufgeht, so t jede zu $\mathfrak{q}$ prime Zahl in K Normenrest des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{q}$.

Geht dagegen $\mathfrak{q}$ in der Relativdiskriminante von $K(\sqrt{\mu})$ auf, so beeute e im Falle $\mathfrak{q}+2$ einen beliebigen positiven Exponenten, im Falle $|2$, wenn $\mathfrak{q}$ in 2 zu genau k-ter Potenz aufgeht, einen beliebigen Exponenten $> 2k$; dann sind von allen vorhandenen zu $\mathfrak{q}$ primen und nach inkongruenten Zahlen in K genau die Hälfte Normenreste des Körpers $(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{q}$.

IV. Es sei $\mathfrak{p}$ ein zu 2 primes Primideal des Körpers K. Geht $\mathfrak{p}$ in er Zahl μ genau zur a-ten Potenz auf, so ist die Relativdiskriminante on $K(\sqrt{\mu})$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar oder nicht, je nachdem a ungerade oder erade ist.

Es sei $\mathfrak{l}$ ein Primideal von K, das in 2 aufgeht und zwar zu genau -ter Potenz; ferner gehe $\mathfrak{l}$ in μ genau zur a-ten Potenz auf. Die Relativiskriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ ist durch $\mathfrak{l}$ teilbar oder nicht, je achdem die Kongruenz $x^2 \equiv \mu \pmod{\mathfrak{l}^{2k+a}}$ in K unlösbar oder lösbar ist.

V. Dirichlet-Heckescher Satz:

Es seien $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{a}$ zwei teilerfremde Ideale aus K. Es gibt unendlich iele Primideale $\mathfrak{p}$ und ganze total positive zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde Zahlen α, β es Körpers K, so daß

$$(\alpha)\mathfrak{a} = (\beta)\mathfrak{p}, \qquad \alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{f}}$$

t.

Für die Sätze I bis IV vergleiche man die Arbeiten: D. Hilbert, Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers; Mathematische Annalen **51** (1898), S. 1—127. Ph. Furtwängler, Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern; Mathematische Annalen, Erster Teil, **67** (1909), S. 1—31; Zweiter Teil, **72** (1912), S. 346—386; Dritter Teil, **74** (1914), S. 413—429.

Satz V steht bei E. Hecke, Über die L-Funktionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper; Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1917, S. 299—318. E. Landau, Über Ideale und Primideale in Idealklassen; Mathematische Zeitschrift 2 (1918), S. 52—154.

In einer späteren Arbeit hoffe ich die Theorie der quadratischen Formen in algebraischen Zahlkörpern weiter entwickeln zu können. Herrn D. Hilbert danke ich für seine freundliche Erlaubnis, meinen Beweis von dem seinigen veröffentlichen zu dürfen.

§ 1.

Es bedeute $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,k=1}^{3} \alpha_{ik} x_i x_k$ eine ternäre quadratische Form mit ganzen algebraischen Koeffizienten $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ aus einem Körper K. Die Determinante $|\alpha_{ik}| = d$ sei im folgenden stets $\neq 0$. Ich setze $d(\alpha_{ik})^{-1} = (A_{ik})$ und nenne die ternäre quadratische Form $F(X) = F(X_1, X_2, X_3) = \sum_{i,k=1}^{3} A_{ik} X_i X_k$ die zu $f(x)$ *adjungierte* Form. Ihre Koeffizienten $A_{ik} = A_{ki}$ sind ganze algebraische Zahlen aus K; ihre Determinante ist $|A_{ik}| = d^2 \neq 0$. Die größten gemeinsamen Teiler der Koeffizienten von $f(x)$ und $F(X)$ seien $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}) = \mathfrak{a}$, $(A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{33}) = \mathfrak{A}$; dann ist $\mathfrak{a}^2 | \mathfrak{A} = \mathfrak{a}^2 \mathfrak{D}$. Ferner ist nach der Fundamentaleigenschaft der Elementarteiler $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}} \Big| \frac{(d)}{\mathfrak{A}}$, $\frac{\mathfrak{a}(d)}{\mathfrak{A}^2} = \frac{(d)}{\mathfrak{a}^3 \mathfrak{D}^2}$ ganz, also $(d) = \mathfrak{a}^3 \mathfrak{D}^2 \mathfrak{b}$ und $(|A_{ik}|) = (d^2) = (\mathfrak{a}^2 \mathfrak{D})^3 \mathfrak{D} \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{A}^3 \mathfrak{b}^2 \mathfrak{D}$.

Es gelten folgende zwei Identitäten, deren Richtigkeit man z. B. durch Vergleichung der Koeffizienten sofort erkennt:

$$(1)\quad f(x_1, x_2, x_3) f(y_1, y_2, y_3) = \Big(\sum_{i,k=1}^{3} \alpha_{ik} x_i y_k\Big)^2 + F\left(\left|\begin{matrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{matrix}\right|, \left|\begin{matrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{matrix}\right|, \left|\begin{matrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{matrix}\right|\right)$$

$$(2)\quad F(X_1, X_2, X_3) F(Z_1, Z_2, Z_3) = \Big(\sum_{i,k=1}^{3} A_{ik} X_i Z_k\Big)^2 + d f\left(\left|\begin{matrix} Z_2 & Z_3 \\ X_2 & X_3 \end{matrix}\right|, \left|\begin{matrix} Z_3 & Z_1 \\ X_3 & X_1 \end{matrix}\right|, \left|\begin{matrix} Z_1 & Z_2 \\ X_1 & X_2 \end{matrix}\right|\right).$$

Hierin mögen X_ν und Z_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ die Unterdeterminanten von x_ν und z_ν in der Matrix $\begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ y_1 y_2 y_3 \\ z_1 z_2 z_3 \end{pmatrix}$ bedeuten. Dann sind die in (2) auftretenden Größen $\begin{vmatrix} Z_2 Z_3 \\ X_2 X_3 \end{vmatrix}, \ldots$ die Unterdeterminanten von Y_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ in der Matrix $\begin{pmatrix} X_1 X_2 X_3 \\ Y_1 Y_2 Y_3 \\ Z_1 Z_2 Z_3 \end{pmatrix}$, haben also die Werte $(x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3) y_\nu$; und da f homogen ist, so folgt aus (1) und (2)

$$F(X) f(x) f(y)$$

$$= F(X) \Big(\sum_{i,k=1}^{3} \alpha_{ik} x_i y_k \Big)^2 + \Big(\sum_{i,k=1}^{3} A_{ik} X_i Z_k \Big)^2 + d f(y) \Big(\sum_{\nu=1}^{3} x_\nu X_\nu \Big)^2.$$

Es sei $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ein ganzzahliges Wertsystem der y, für welches $f(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = m \neq 0$ ist. Ferner seien die ganzzahligen Werte $z_\nu = \gamma_\nu$ so beschaffen, daß für die zugehörigen $X_\nu = A_\nu$ auch die Zahl $F(A_1, A_2, A_3) = M \neq 0$ ist. Dann gilt

$$M m f(x) = M U^2 + V^2 + d m W^2, \tag{3}$$

wo

$$U = \sum_{i,k=1}^{3} \alpha_{ik} \beta_i x_k, \qquad V = \sum_{i,k=1}^{3} A_{ik} A_i Z_k, \qquad W = \sum_{\nu=1}^{3} A_\nu x_\nu$$

gesetzt ist. U, V, W sind homogene lineare Funktionen von x_1, x_2, x_3; die Determinante dieser Substitution sei S. Bildet man von der quadratischen Form (3) beiderseits die Determinante, so folgt

$$(M m)^3 d = M \cdot 1 \cdot d m \cdot S^2, \quad \text{also} \quad S = \pm M m \neq 0.$$

Ist der Körper K reell, so kann $f(x)$ definit oder indefinit sein. Nach dem Trägheitsgesetz der quadratischen Formen ist $f(x)$ dann und nur dann definit, wenn in (3) die Koeffizienten von U^2, V^2, W^2 gleiche Vorzeichen haben. Der Koeffizient von V^2 ist $1 > 0$, also ist für definite $f(x)$ gleichzeitig $M > 0$, $d m > 0$; für indefinite $f(x)$ ist mindestens eine der beiden Zahlen $M, d m < 0$. Es seien $K^{(1)}, \ldots, K^{(s)}$ sämtliche zu K konjugierten reellen Körper, wenn solche vorhanden sind. Es gehe $f^{(i)}$ aus f dadurch hervor, daß die Koeffizienten α_{ik} durch ihre Konjugierten aus $K^{(i)}$ ersetzt werden. Dann ist, wie soeben gezeigt wurde, die Form $f^{(i)}$ definit oder indefinit, je nachdem $\left(\frac{-M, -d m}{1^{(i)}}\right) = -1$ oder $= +1$ ist[1]).

[1]) Das Hilbertsche Symbol $\left(\frac{\nu, \mu}{1^{(i)}}\right)$ hat folgende Definition: Es seien μ, ν zwei von 0 verschiedene Zahlen aus K und i eine Zahl der Reihe 1 bis s. Ist dann zugleich $\mu^{(i)} < 0$, $\nu^{(i)} < 0$, so bedeutet $\left(\frac{\nu, \mu}{1^{(i)}}\right)$ die Zahl -1; in jedem andern Fall bedeutet $\left(\frac{\nu, \mu}{1^{(i)}}\right)$ die Zahl $+1$.

Zwei Zahlen, die wie m und M in der Form $m = f(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $M = F(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2, \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3, \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)$ darstellbar sind, sollen *simultan* durch f und F darstellbar genannt werden. Das Symbol $\left(\frac{-M, -dm}{1^{(i)}}\right)$ hat also für zwei beliebige durch f und F simultan darstellbare Zahlen $m \neq 0$ und $M \neq 0$ denselben Wert; dieser hängt also nur von f, nicht von der besonderen Wahl von m und M ab. Es verdient hervorgehoben zu werden, daß durch das Vorzeichen von $d^{(i)}$ und den Wert von $\left(\frac{-M, -dm}{1^{(i)}}\right)$ der Trägheitsindex von $f^{(i)}$ eindeutig festgelegt ist.

Es sei $\mathfrak{w}$ ein Primideal aus K und r eine natürliche Zahl. Ich betrachte bei festen $m \neq 0$ und $M \neq 0$ die Kongruenz

$$M U_0^2 + V_0^2 + dm W_0^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}^{2r}} \tag{4}$$

in den Unbekannten U_0, V_0, W_0. Ist sie für jedes r in ganzen U_0, V_0, W_0 aus K lösbar, welche nicht sämtlich durch $\mathfrak{w}$ teilbar sind, so hat das Normenrestsymbol $\left(\frac{-M, -dm}{\mathfrak{w}}\right)$ den Wert $+1$. Gibt es dagegen ein r, für das sie nicht in solchen U_0, V_0, W_0 lösbar ist, so ist $\left(\frac{-M, -dm}{\mathfrak{w}}\right) = -1$. Die höchste Potenz von $\mathfrak{w}$, die in Mm aufgeht, sei $\mathfrak{w}^{r_0}$ $(r_0 \geqq 0)$. Es sei $\left(\frac{-M, -dm}{\mathfrak{w}}\right) = +1$ und $r > r_0$. Die Kongruenz (4) hat dann eine Lösung U_0, V_0, W_0 mit $(U_0, V_0, W_0, \mathfrak{w}^r) = \mathfrak{w}^{r_0}$. Die Determinante $S = \pm Mm$ der in bezug auf x_1, x_2, x_3 linearen Kongruenzen

$$U \equiv U_0, \quad V \equiv V_0, \quad W \equiv W_0 \pmod{\mathfrak{w}^r} \tag{5}$$

ist genau durch $\mathfrak{w}^{r_0}$ teilbar; und da $\mathfrak{w}^{r_0}$ auch in den rechten Seiten aufgeht, so werden sie durch drei ganze Zahlen x_1, x_2, x_3 befriedigt, die nicht alle $\equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}}$ sind. Dann ist nach (3), (4), (5)

$$Mm f(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}^{2r}},$$

$$f(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}^{2r-r_0}}, \qquad f(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}^r}.$$

Ist also $\left(\frac{-M, -dm}{\mathfrak{w}}\right) = +1$, so ist $f(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}^r}$ für jedes r lösbar, und zwar in solchen x_1, x_2, x_3, die nicht alle durch $\mathfrak{w}$ teilbar sind.

Umgekehrt sei $f(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}^r}$ für jedes r in derartigen x_1, x_2, x_3 lösbar. Dann ist auch $f(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}^{2r-r_0}}$, also $Mm f(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}^{2r}}$ lösbar. Wegen $\mathfrak{w}^{r_0+1} \nmid Mm = \pm S$ ist für ein solches Wertsystem x eine der Zahlen U, V, W nicht durch $\mathfrak{w}^{r_0+1}$ teilbar; da nun

$$MU^2 + V^2 + dmW^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}^{2r}}$$

ilt, so ist auch

$$M U_0^2 + V_0^2 + dm W_0^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}^{2r-2r_0}},$$

lso auch (4) für jedes r mit der Bedingung $(U_0, V_0, W_0, \mathfrak{w}) = \mathfrak{o}$ lösbar.

Daraus folgt: Ist $f(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}^r}$ für jedes r lösbar (mit $(x_1, x_2, x_3, \mathfrak{w}) = \mathfrak{o}$), so ist $\left(\frac{-M, -dm}{\mathfrak{w}}\right) = +1$; ist dagegen $f(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{w}^r}$ nicht für jedes r lösbar, so ist $\left(\frac{-M, -dm}{\mathfrak{w}}\right) = -1$. Der Wert des Symboles $\left(\frac{-M, -dm}{\mathfrak{w}}\right)$ hängt also nur von f, nicht von der besonderen Wahl des simultan dargestellten Zahlen m und M ab.

Ich setze noch $(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, 2\alpha_{23}, 2\alpha_{31}, 2\alpha_{12}) = \mathfrak{a}\mathfrak{s}$, $(A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{23}, 2A_{31}, 2A_{12}) = \mathfrak{A}\mathfrak{S}$; dann ist $\mathfrak{s} \mid 2$, $\mathfrak{S} \mid 2$. Zwei ternäre quadratische Formen mit ganzen Koeffizienten aus K heißen von gleicher *Ordnung*, wenn sie in den Idealen $\mathfrak{d}, \mathfrak{s}, \mathfrak{D}, \mathfrak{S}$ und der Zahl d übereinstimmen. Alle Formen derselben Ordnung, die in den Werten von $\left(\frac{-M, -dm}{\mathfrak{w}}\right)$ für alle $\mathfrak{w}$ (d. h. für $\mathfrak{w}$ = Primideal und $\mathfrak{w} = 1^{(i)}$) übereinstimmen[2]), bilden ein *Geschlecht*.

§ 2.

In diesem Paragraphen mache ich folgende drei Voraussetzungen:

1. ξ sei eine ganze *total positive*[3]) Zahl aus K.

2. -1 und $-\xi$ seien nicht gleich dem Quadrat einer Zahl des Körpers K.

3. Jeder Primidealteiler von 2 gehe in der Relativdiskriminante des relativquadratischen Körpers $K(\sqrt{-\xi})$ auf.

Ich betrachte fortan nur die spezielle ternäre Form

$$f(x_1, x_2, x_3) = \xi x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

In den Bezeichnungen von § 1 ist dann

$$F(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 - \xi X_2^2 - \xi X_3^2, \qquad d = \xi + 0,$$
$$\mathfrak{a} = \mathfrak{A} = \mathfrak{D} = \mathfrak{s} = \mathfrak{S} = \mathfrak{o}, \qquad \mathfrak{d} = (\xi).$$

etzt man für β und γ die Zahlentripel 0, 1, 0 und 0, 0, 1, so wird $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = 0$; und es sind $m = -1 + 0$ und $M = +1 + 0$ multan darstellbar, so daß sich das Geschlecht von $f(x)$ durch die Werte der Symbole $\left(\frac{-1, \xi}{\mathfrak{w}}\right) = \varepsilon_{\mathfrak{w}}$ bestimmt.

[2]) Dies sind in Wirklichkeit nur endlich viele Bedingungen, da für ein Primideal $\mathfrak{w} + 2\alpha\beta$ stets $\left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{w}}\right) = +1$ ist.

[3]) d. h. $\xi^{(i)} > 0$ für $i = 1, \ldots, s$. Bezeichnung (nach Landau): $\xi > 0$.

Hilfssatz 1. Das Geschlecht von $f(x)$ enthält eine Form der Gestalt $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -M_1 & N_1 \\ 0 & N_1 & -M_1' \end{pmatrix}$, wo M_1 eine nicht in 2ξ aufgehende total positive Primzahl aus K bedeutet.

Beweis. 1. Es sei t_1 irgendeine total positive Zahl aus K. Dann ist

$$\left(\frac{t_1, -\xi}{1^{(i)}}\right) = \left(\frac{-1, \xi}{1^{(i)}}\right) = +1.$$

2. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primfaktor der Relativdiskriminante von $K(\sqrt{-\xi})$, der nicht in 2 aufgeht. Nach Satz IV der Einleitung teilt dann $\mathfrak{p}$ auch die Relativdiskriminante von $K(\sqrt{+\xi})$, und umgekehrt. Nach Satz III der Einleitung gibt es dann in K eine ganze nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbare Zahl t_2, so daß $\left(\frac{t_2, -\xi}{\mathfrak{p}}\right)$ den vorgeschriebenen Wert $\varepsilon_\mathfrak{p}$ hat.

3. Es sei $\mathfrak{l}$ ein Primteiler von 2. Dann geht nach der Voraussetzung 3. dieses Paragraphen das Primideal $\mathfrak{l}$ auch in der Relativdiskriminante des relativquadratischen Körpers $K(\sqrt{-\xi})$ auf. Nach Satz III der Einleitung gibt es also ein ganzes t_3 mit $\mathfrak{l} \nmid t_3$ derart, daß $\left(\frac{t_3, -\xi}{\mathfrak{l}}\right) = \varepsilon_\mathfrak{l}$ ist.

Damit eine Zahl t aus K die Eigenschaften der in den drei vorhergehenden Abschnitten betrachteten Zahlen t_1, t_2, t_3 besitzt, reicht es hin, daß $t \succ 0$ ist und die Kongruenzen

(6) $t \equiv t_2 \pmod{\mathfrak{p}}$ für alle bei 2. in Betracht kommenden $\mathfrak{p}$.

(7) $t \equiv t_3 \pmod{\mathfrak{l}^{2k+1}}$ für alle $\mathfrak{l} \mid 2$, wenn genau $\mathfrak{l}^k$ in 2 aufgeht,

erfüllt sind. (6) und (7) sind kompatibel und lassen sich durch *eine* Kongruenz

$$t \equiv t_0 \pmod{\mathfrak{n}}$$

ersetzen, wo das Ideal $\mathfrak{n}$ sich aus den verschiedenen Primidealen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{l}$ zusammensetzt und zu t_0 teilerfremd ist. Nach Satz V der Einleitung gibt es unendlich viele nicht assoziierte total positive Primzahlen t, welche $\equiv t_0 \pmod{\mathfrak{n}}$ sind. Unter diesen wähle ich eine, die in 2ξ nicht aufgeht, und nenne sie M_1.

Nach Satz I der Einleitung ist nun

$$\prod_\mathfrak{w} \varepsilon_\mathfrak{w} = \prod_\mathfrak{w} \left(\frac{-1, \xi}{\mathfrak{w}}\right) = +1,$$

wo über alle $\mathfrak{w} \mid 2\xi$ und $\mathfrak{w} = 1^{(i)}$ zu multiplizieren ist; ebenso ist

$$\left(\frac{M_1, -\xi}{(M_1)}\right) \prod_\mathfrak{w} \left(\frac{M_1, -\xi}{\mathfrak{w}}\right) = +1,$$

o dieselben $\mathfrak{w}$ zu nehmen sind. Andererseits ist nach Konstruktion

$$\left(\frac{M_1, -\xi}{\mathfrak{w}}\right) = \varepsilon_{\mathfrak{w}},$$

daß aus den drei letzten Gleichungen folgt

$$\left(\frac{M_1, -\xi}{(M_1)}\right) = +1;$$

. h. die Kongruenz

$$-\xi \equiv x^2 \pmod{M_1}$$

t lösbar. Es gibt daher in K zwei ganze Zahlen M_1' und N_1, so daß

8) $$-\xi = N_1^2 - M_1 M_1'$$

ilt. Nun setze ich

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -M_1 & N_1 \\ 0 & N_1 & -M_1' \end{pmatrix},$$

ann ist wegen (8) die adjungierte Form

$$F_1 = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & -M_1' & -N_1 \\ 0 & -N_1 & -M_1 \end{pmatrix}.$$

erner ist $f_1(1,0,0) = 1$, $f_1(0,1,0) = -M_1$, $F_1(0,0,1) = -M_1$, so aß die Zahlen 1 und $-M_1$ durch f_1 und F_1 simultan dargestellt werden. aher besitzt f_1 die Geschlechtscharaktere $\left(\frac{M_1, -\xi}{\mathfrak{w}}\right) = \varepsilon_{\mathfrak{w}}$; gehört also dem eschlecht von f an, da offenbar f_1 und F_1 *eigentlich primitive* Formen nd, d. h. die Invarianten $\mathfrak{a} = \mathfrak{A} = \mathfrak{H} = \mathfrak{G} = \mathfrak{o}$ besitzen. Damit ist Hilfsatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2. Es gibt eine Substitution von der Determinante ± 1 nit (ganzen oder gebrochenen) Koeffizienten aus K, welche die Form

$$f = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

n die Form

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -M_1 & N_1 \\ 0 & N_1 & -M_1' \end{pmatrix}$$

es Hilfssatzes 1 transformiert.

Beweis. Das nach Hilfssatz 1 gemeinsame Geschlecht von f und f_1 ird durch die Werte der Symbole $\left(\frac{-1, \xi}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{M_1, -\xi}{\mathfrak{w}}\right)$ bestimmt. Hierbei ommen für $\mathfrak{w}$ alle in $2 M_1 \xi$ aufgehenden Primideale sowie die Zeichen $1^{(i)}$

in Betracht. Ich werde jetzt zeigen, daß es in K eine ganze Zahl ζ_0 gibt, welche für alle diese $\mathfrak{w}$ die Gleichungen

$$\left(\frac{-1, \zeta_0}{\mathfrak{w}}\right) = +1, \quad \left(\frac{M_1, -\zeta_0}{\mathfrak{w}}\right) = +1 \tag{9}$$

erfüllt.

1. Es sei $\mathfrak{w} = 1$[4]. Dann wird (9) wegen $M_1 > 0$ für jedes $\zeta_0 > 0$ erfüllt.

2. Es sei $\mathfrak{w} = (M_1) + 2$. Dann ist für jedes nicht durch M_1 teilbare ζ_1 das Symbol $\left(\frac{-1, \zeta_1}{(M_1)}\right) = +1$; und unter allen diesen ζ_1 gibt es sicher auch solche, für welche $\left(\frac{M_1, -\zeta_1}{(M_1)}\right) = +1$ gilt; z. B. hat $\zeta_1 = -1$ diese Eigenschaft.

3. Es sei $\mathfrak{w} \mid \xi$, $\mathfrak{w} + 2$ [4]). Wegen $(M_1, \xi) = \mathfrak{o}$ gilt dann (9) für jedes ζ_0, das nicht durch $\mathfrak{w}$ teilbar ist.

4. Es sei $\mathfrak{w} = \mathfrak{l} \mid 2$. Es gehe $\mathfrak{l}$ zu genau k-ter Potenz in 2 auf, und man betrachte ein System von $\varphi(\mathfrak{l}^{2k+1})$ inkongruenten nicht durch $\mathfrak{l}$ teilbaren Zahlen ζ_2 modulo $\mathfrak{l}^{2k+1}$. Nach Satz III der Einleitung genügen von diesen mindestens die Hälfte der Gleichung $\left(\frac{-1, \zeta_2}{\mathfrak{l}}\right) = +1$, und gleichfalls mindestens die Hälfte der Gleichung $\left(\frac{M_1, -\zeta_2}{\mathfrak{l}}\right) = +1$. Diese beiden Gleichungen lassen sich also dann und nur dann nicht durch dasselbe ζ_2 erfüllen, wenn für jedes ζ_2 mit $\left(\frac{-1, \zeta_2}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ die Relation $\left(\frac{M_1, -\zeta_2}{\mathfrak{l}}\right) = -1$, mit $\left(\frac{-1, \zeta_2}{\mathfrak{l}}\right) = -1$ die Relation $\left(\frac{M_1, -\zeta_2}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ erfüllt ist; d. h. für alle ζ_2 müßte

$$\left(\frac{-1, \zeta_2}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{M_1, -\zeta_2}{\mathfrak{l}}\right) = -1$$

gelten. Hieraus folgte durch Zerlegung der Normenrestsymbole

$$\left(\frac{-1, -1}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{-1, -\zeta_2}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{M_1, -\zeta_2}{\mathfrak{l}}\right) = -1,$$

$$\left(\frac{-M_1, -\zeta_2}{\mathfrak{l}}\right) = -\left(\frac{-1, -1}{\mathfrak{l}}\right), \quad \text{also konstant} = +1,$$

denn die linke Seite ist jedenfalls $+1$ für $\zeta_2 = -1$. Daher wäre auch

$$\left(\frac{-1, -1}{\mathfrak{l}}\right) = -1. \tag{10}$$

Ich setze jetzt $\zeta_3 = \xi\zeta_2$; dann wird

$$\left(\frac{-1, \zeta_3}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{-1, \xi}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{-1, \zeta_2}{\mathfrak{l}}\right), \qquad \left(\frac{M_1, -\zeta_3}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{M_1, -\xi}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{M_1, \zeta_2}{\mathfrak{l}}\right). \tag{11}$$

[4]) Falls es solche $\mathfrak{w}$ gibt.

Hierin haben die beiden rechten Seiten den gleichen Wert; denn es ist $\left(\frac{-1,\xi}{\mathfrak{l}}\right)=\left(\frac{M_1,-\xi}{\mathfrak{l}}\right)$ und $\left(\frac{-1,\zeta_2}{\mathfrak{l}}\right)\left(\frac{M_1,\zeta_2}{\mathfrak{l}}\right)=\left(\frac{-M_1,\zeta_2}{\mathfrak{l}}\right)=+1$, da $\left(\frac{-M_1,-\zeta_2}{\mathfrak{l}}\right)$ für alle zu $\mathfrak{l}$ primen ζ_2, also auch für $-\zeta_2$, den Wert $+1$ hat. Damit also die linken Seiten von (11) beide den Wert $+1$ haben, genügt es, daß die Gleichung $\left(\frac{-1,\xi}{\mathfrak{l}}\right)=\left(\frac{-1,\zeta_2}{\mathfrak{l}}\right)$ erfüllt ist. Diese Gleichung ist aber sicher lösbar, mag nun $\left(\frac{-1,\xi}{\mathfrak{l}}\right)=+1$ oder $=-1$ sein, denn $\left(\frac{-1,\zeta_2}{\mathfrak{l}}\right)$ ist $=+1$ für $\zeta_2=+1$ und nach (10) $=-1$ für $\zeta_2=-1$. Ist $\mathfrak{l}^{k_0}$ die höchste Potenz von $\mathfrak{l}$, die in ξ aufgeht, so gilt dann

$$\left(\frac{-1,\zeta_4}{\mathfrak{l}}\right)=+1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{M_1,-\zeta_4}{\mathfrak{l}}\right)=+1$$

für alle $\zeta_4\equiv\xi\zeta_2 \pmod{\mathfrak{l}^{2k+k_0+1}}$.

Damit ist festgestellt: Zu jedem Primideal $\mathfrak{w}\,|\,2M_1\xi$ gibt es eine ganze Zahl $\zeta_\mathfrak{w}$ von folgenden Eigenschaften:

I. Ist $\mathfrak{w}+2$, so sind für jedes $\zeta_0\equiv\zeta_\mathfrak{w} \pmod{\mathfrak{w}}$ die beiden Gleichungen (9) erfüllt; $\zeta_\mathfrak{w}$ ist nicht durch $\mathfrak{w}$ teilbar;

II. Ist $\mathfrak{w}=\mathfrak{l}\,|\,2$, so sind für jedes $\zeta_0\equiv\zeta_\mathfrak{w} \pmod{\mathfrak{w}^{k'}}$ die beiden Gleichungen (9) erfüllt. Hierin ist entweder $k'=2k+1$ und $\mathfrak{l}\nmid\zeta_\mathfrak{w}$; oder $\zeta_\mathfrak{w}$ und ξ enthalten genau dieselbe Potenz $\mathfrak{l}^k$ von $\mathfrak{l}$, und es ist $k'=2k+k_0+1$.

Die den verschiedenen $\mathfrak{w}$ entsprechenden Kongruenzen lassen sich nun gleichzeitig durch eine Zahl ζ_0 befriedigen, und zwar darf man dabei fordern, daß ζ_0 total positiv ist und mit $2M_1\xi$ höchstens solche Primteiler gemeinsam hat, die auch in 2 aufgehen, und zwar in keiner höheren Potenz, als sie in ξ auftreten. Dieses ζ_0 genügt sämtlichen Gleichungen (9). Dieselbe Eigenschaft hat jede total positive Zahl $\zeta\equiv\zeta_0 \pmod{8M_1\xi}$. Von dem Ideal (ζ_0) spalte ich den größten zu 2 relativ primen Faktor $\mathfrak{b}$ ab. Dann ist auch $(\mathfrak{b},\varkappa M_1\xi)=\mathfrak{o}$; $\mathfrak{b}$ ist also Repräsentant einer Idealklasse modulo $8M_1\xi$. Nach Satz V der Einleitung enthält diese Idealklasse ein Primideal $\mathfrak{z}$. Dann ist $\frac{(\zeta_0)}{\mathfrak{b}}\mathfrak{z}$ ein Hauptideal (ζ) mit $\zeta\equiv\zeta_0 \pmod{8M_1\xi}$ und $\frac{\zeta}{\zeta_0}\succ 0$, so daß wegen $\zeta_0\succ 0$ auch $\zeta\succ 0$ ist. Die Zahl ζ erfüllt also die Bedingungen (9) und hat außer etwaigen in 2 aufgehenden Primfaktoren nur den Primteiler $\mathfrak{z}$, der nicht in $8M_1\xi$ enthalten ist. Aus dem Reziprozitätsgesetz (Satz I der Einleitung) folgt nun genau wie beim Beweise von Hilfssatz 1, daß auch

$$\left(\frac{-1,\zeta}{\mathfrak{z}}\right)=+1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{M_1,-\zeta}{\mathfrak{z}}\right)=+1$$

gilt. Mit Rücksicht auf (9) gelten also die Gleichungen

$$\left(\frac{-1,\zeta}{\mathfrak{w}'}\right)=+1,\quad \left(\frac{M_1,-\zeta}{\mathfrak{w}'}\right)=+1 \tag{12}$$

für *alle* Primideale $\mathfrak{w}'$ und für $\mathfrak{w}'=1^{(i)}$. Nach Satz II der Einleitung sind also die beiden Diophantischen Gleichungen

$$\zeta u^2-v^2=w^2 \quad \text{und} \quad -\zeta u_1^2+M_1 v_1^2=w_1^2 \tag{13}$$

in ganzen Zahlen u, v, w und u_1, v_1, w_1 aus K lösbar, die nicht alle Null sind. Da -1, $\pm\zeta$, M_1, $\frac{M_1}{\zeta}$ keine Quadratzahlen des Körpers K sind (vgl. Voraussetzung 1 dieses Paragraphen), so sind alle sechs Zahlen $u, \ldots, w_1$ von 0 verschieden; insbesondere ist $u\neq 0$, $u_1\neq 0$. Aus (13) folgt

$$-\zeta u^2=f(0,w,v),\quad -\zeta u_1^2=f_1(w_1,v_1,0). \tag{14}$$

Nach Satz V der Einleitung gibt es unendlich viele nicht assoziierte Primzahlen $Z\equiv 1 \pmod{8\xi\zeta}$. Dann ist aber

$$\left(\frac{Z,\xi\zeta}{\mathfrak{w}}\right)=+1 \tag{15}$$

für alle $\mathfrak{w}\,|\,2\xi\zeta$ und $\mathfrak{w}=1^{(i)}$[5]), also gilt (15) nach Satz I der Einleitung auch für $\mathfrak{w}=(Z)$ und folglich für jedes $\mathfrak{w}$. Nach Satz II ist daher die Gleichung

$$ZU^2+\xi\zeta V^2=W^2 \tag{16}$$

in nicht sämtlich verschwindenden ganzen Zahlen U, V, W aus K lösbar; und da $\xi\zeta$ nicht das Quadrat einer Körperzahl ist, so ist $U\neq 0$.

Ferner folgt aus (12) und (15) für jedes $\mathfrak{w}$

$$\left(\frac{Z,\xi\zeta}{\mathfrak{w}}\right)\left(\frac{-1,\zeta}{\mathfrak{w}}\right)\left(\frac{-1,\xi}{\mathfrak{w}}\right)\left(\frac{M_1,-\xi}{\mathfrak{w}}\right)\left(\frac{M_1,-\zeta}{\mathfrak{w}}\right)=+1\cdot+1\cdot\varepsilon_{\mathfrak{w}}\cdot\varepsilon_{\mathfrak{w}}\cdot+1=+1,$$

andererseits hat die linke Seite dieser Gleichung nach Zusammensetzung den Wert $\left(\frac{-M_1Z,\xi\zeta}{\mathfrak{w}}\right)$, so daß mit Rücksicht auf Satz II die Gleichung

$$-M_1ZU_1^2+\xi\zeta V_1^2=W_1^2 \tag{17}$$

mit $U_1\neq 0$ lösbar ist.

Aus (13) und (16) folgt

$$\begin{aligned} Z(uU)^2&=(uW)^2-\xi\zeta(uV)^2=(uW)^2-\xi(vV)^2-\xi(wV)^2\\ &=F(uW,vV,-wV), \end{aligned} \tag{18}$$

[5]) Man braucht an dieser Stelle nicht die Landausche Verschärfung des Heckeschen Satzes, da wegen $\xi\zeta>0$ das Symbol $\left(\frac{\alpha,\xi\zeta}{1^{(i)}}\right)=-1$ für jedes $\alpha\neq 0$ ist.

d aus (8), (13) und (17)

$$Z(u_1 U_1 M_1)^2 = -M_1 u_1^2 W_1^2 + \xi\zeta M_1 u_1^2 V_1^2 = -M_1 u_1^2 W_1^2 - \xi w_1^2 M_1 V_1^2$$
$$+\xi M_1^2 v_1^2 V_1^2 = \xi(v_1 V_1 M_1)^2 - M_1'(w_1 V_1 M_1)^2 - M_1(u_1 W_1)^2$$
$$+N_1^2 M_1 (w_1 V_1)^2 = \xi(v_1 V_1 M_1)^2 - M_1'(w_1 V_1 M_1)^2 - M_1(u_1 W_1 + w_1 V_1 N_1)^2$$
$$+2N_1(w_1 V_1 M_1)(u_1 W_1 + w_1 V_1 N_1) = F_1(v_1 V_1 M_1, -w_1 V_1 M_1, u_1 W_1 + w_1 V_1 N_1).$$

Wegen der Homogenität von (16) kann $W = wW'$ durch w teilbar genommen werden. Setze ich dann $\beta_1 = -V$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = -uW'$, $= 0$, $\gamma_2 = w$, $\gamma_3 = v$, so ist $\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 = uW$, $\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3 = vV$, $\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = -wV$. Folglich sind wegen (14) und (18) die Zahlen ζu^2 und $Z(uU)^2$ durch f und F simultan darstellbar. Ferner mache die Annahme $w_1 | W_1 = w_1 W_1'$ und setze $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = -u_1 W_1' - V_1 N_1$, $= -V_1 M_1$, $\gamma_1 = w_1$, $\gamma_2 = v_1$, $\gamma_3 = 0$; dann ist $\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 = v_1 V_1 M_1$, $\gamma_1 - \beta_1\gamma_3 = -w_1 V_1 M_1$, $\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = u_1 W_1 + w_1 V_1 N_1$, so daß nach 4) und (19) die Zahlen $-\zeta u_1^2$ und $Z(u_1 U_1 M_1)^2$ durch f_1 und F_1 multan darstellbar sind.

Folglich gilt wegen (3) eine Identität

$$f(x) = \frac{P^2}{-\zeta} + \frac{Q^2}{-\zeta Z} + \xi\frac{R^2}{Z},$$

P, Q, R aus x_1, x_2, x_3 durch eine lineare umkehrbare Substitution S t Koeffizienten aus dem Körper K hervorgehen. Ebenso gilt

$$f_1(x) = \frac{P_1^2}{-\zeta} + \frac{Q_1^2}{-\zeta Z} + \xi\frac{R_1^2}{Z},$$

P_1, Q_1, R_1 aus x_1, x_2, x_3 ebenfalls durch eine lineare in K rationale bstitution S_1 hervorgehen. Daher besitzt die Substitution $S^{-1}S_1 = T$ effizienten aus K und führt die Form f in f_1 über; und da f und f_1 selbe Determinante ξ haben, so ist offenbar $|T| = \pm 1$. Damit ist lfssatz 2 bewiesen.

§ 3.

Hilfssatz 3. ξ sei eine ganze total positive Zahl des Körpers K. ξ sei nicht das Quadrat einer Körperzahl, so daß $K(\sqrt{-\xi})$ nicht mit K ntisch ist. Ist dann die Relativdiskriminante von $K(\sqrt{-\xi})$ durch en Primfaktor von 2 teilbar, so läßt sich ξ als Summe von drei Quadra- von Körperzahlen darstellen.

Beweis. 1. Die Zahl -1 sei in K als Summe von zwei Quadraten stellbar:

$$-1 = a^2 + b^2.$$

Dann ist sogar identisch in ξ

$$\xi = \left(\frac{\xi+1}{2}\right)^2 + \left(a\frac{\xi-1}{2}\right)^2 + \left(b\frac{\xi-1}{2}\right)^2. \tag{20}$$

2. Die Zahl -1 sei nicht Summe von zwei Quadraten. Die drei Voraussetzungen des vorigen Paragraphen sind erfüllt. Nach Hilfssatz 2 kann f rational in f_1 transformiert werden, und da f_1 die Zahl $f_1(1,0,0)=1$ darstellt, so gibt es insbesondere drei Zahlen t_1, t_2, t_3 aus K, so daß

$$f(t_1, t_2, t_3) = \xi t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 = 1$$

ist. Da hierin $t_1 \neq 0$ ist, so folgt die gesuchte Darstellung

$$\xi = \left(\frac{1}{t_1}\right)^2 + \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2 + \left(\frac{t_3}{t_1}\right)^2.$$

Hilfssatz 4. Es sei $\mathfrak{l}$ ein Primfaktor von 2. Es gibt eine ganze Zahl ϱ des Körpers K, die als Summe von vier Quadraten darstellbar ist und von den Teilern der 2 nur das Primideal $\mathfrak{l}$, und zwar genau in erster Potenz enthält.

Beweis. 1. $\mathfrak{l}$ gehe in 2 zu ungerader Potenz auf. Dann läßt sich setzen:

$$2 = \varkappa \alpha^2,$$

wo $\varkappa$ eine ganze Zahl aus K bedeutet, die jeden Primfaktor von 2 enthält, von diesen aber das Primideal $\mathfrak{l}$ nur in erster Potenz. Bedeute nun μ irgendeine ganze Zahl mit $(\mu, 2) = \mathfrak{l}$, so ist

$$\varrho = \varkappa + \mu^2 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \mu^2 + 0^2$$

als Summe von vier Quadraten darstellbar, und es gilt $(\varrho, 4) = \mathfrak{l}$.

2. $\mathfrak{l}$ gehe in 2 in gerader Potenz auf. Dann setze ich

$$2 = \nu \beta^2,$$

wo ν eine ganze nicht durch $\mathfrak{l}$ teilbare Zahl bedeutet. Es sei λ eine ganze Zahl, in der genau die erste Potenz von $\mathfrak{l}$ aufgeht; dann gibt es zwei ganze Zahlen γ_1 und γ_2 mit $\mathfrak{l} + \gamma_1$, so daß

$$\nu \equiv \gamma_1 + \gamma_2 \lambda \pmod{\mathfrak{l}^2}$$

gilt. Durchläuft δ ein System zu $\mathfrak{l}$ primer modulo $\mathfrak{l}$ inkongruenter Zahlen, so sind auch die Zahlen δ^2 alle modulo $\mathfrak{l}$ verschieden; denn aus $\delta^2 \equiv \delta'^2 \pmod{\mathfrak{l}}$ folgt $\delta \equiv \pm \delta' \equiv \delta' \pmod{\mathfrak{l}}$. Jedes δ ist also quadratischer Rest nach $\mathfrak{l}$. Man kann daher

$$\gamma_1 \equiv \delta_1^2 \pmod{\mathfrak{l}}, \qquad \nu \equiv \delta_1^2 + \gamma_2' \lambda \pmod{\mathfrak{l}^2}$$

setzen. Ist nun hierin $\mathfrak{l} \mid \gamma_2'$, so folgt $\nu \equiv \delta_1^2 \pmod{\mathfrak{l}^2}$; ist aber $\mathfrak{l} + \gamma_2'$, so gibt es ein δ_2 derart, daß $\gamma_2' \equiv \delta_2^2 \pmod{\mathfrak{l}}$, also $\nu \equiv \delta_1^2 + \delta_2^2 \lambda \pmod{\mathfrak{l}^2}$

. Es bedeute $\mathfrak{l}^k$ die in 2 aufgehende Potenz von $\mathfrak{l}$; dann ist im ersteren ll $2 \equiv (\delta_1\beta)^2 \pmod{\mathfrak{l}^{k+2}}$. Setze ich

1) $$\varrho_1 = 1^2 + (1+\lambda)^2 + (\delta_1\beta)^2 + \lambda^2,$$

gilt in diesem ersteren Fall wegen $\mathfrak{l}^{k+2} \mid 4$

$$\varrho_1 = 2 + 2\lambda + 2\lambda^2 + (\delta_1\beta)^2 \equiv 4 + 2\lambda + 2\lambda^2 \equiv \lambda(\delta_1\beta)^2 \pmod{\mathfrak{l}^{k+2}}.$$

letzteren Fall ist $2 \equiv (\delta_1\beta)^2 + \lambda(\delta_2\beta)^2 \pmod{\mathfrak{l}^{k+2}}$; dann setze ich

2) $$\varrho_2 = 1^2 + 1^2 + (\delta_1\beta)^2 + 0^2,$$

d es wird

$$\varrho_2 \equiv 2(\delta_1\beta)^2 + \lambda(\delta_2\beta)^2 \equiv \lambda(\delta_2\beta)^2 \pmod{\mathfrak{l}^{k+2}}.$$

Man setze nun $\varrho_3 = \dfrac{\varrho_n}{(\delta_n\beta)^2}$ mit $n = 1$ im ersten, $n = 2$ im letzten ll. Dann ist nach (21) und (22) die Zahl ϱ_3 als Summe von vier Quadraten rstellbar und enthält, in gekürzter Form geschrieben, im Nenner das imideal $\mathfrak{l}$ überhaupt nicht, im Zähler dagegen genau in erster Potenz. so gibt es auch eine ganze Zahl ϱ_4 von dieser Eigenschaft:

$$\varrho_4 = \sum_{\nu=1}^{4} \eta_\nu^2, \qquad (\varrho_4, \mathfrak{l}^2) = \mathfrak{l}.$$

Nun sei τ eine ganze Zahl, die durch jeden etwaigen von $\mathfrak{l}$ verschiehen Primteiler $\mathfrak{l}'$ von 2, aber nicht durch $\mathfrak{l}$ selbst teilbar ist; ferner l im Nenner von $\tau\eta_1$ kein $\mathfrak{l}'$ aufgehen. Endlich werde eine ganze hl τ' so bestimmt, daß $\mathfrak{l} \mid \tau'$, $\mathfrak{l}' \nmid \tau'$ und $\tau\tau'\eta_1$ eine ganze Zahl ist. Setze dann

$$\varrho = (\eta_1\tau + \tau')^2 + \sum_{\nu=2}^{4} (\eta_\nu\tau)^2,$$

ist $\varrho = \varrho_4\tau^2 + 2\tau\tau'\eta_1 + \tau'^2$ eine ganze Zahl und

$$\varrho \equiv \varrho_4\tau^2 \pmod{\mathfrak{l}^2}, \qquad \varrho \equiv \tau'^2 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{l}'}, \qquad \text{also} \qquad (\varrho, 4) = \mathfrak{l};$$

erfüllt also die Forderungen des Hilfssatzes.

Hauptsatz (Satz 1). Jede total positive Zahl aus K läßt sich als mme von vier Quadratzahlen aus K darstellen.

Beweis. Es sei ϑ irgendeine total positive Zahl $\neq 0$ aus K. Ich wähle e ganze Zahl $\vartheta_1 \neq 0$ derart, daß $\vartheta\vartheta_1^2$ ganz ist, und setze $4\vartheta\vartheta_1^2 = \vartheta_2$; nn ist $\vartheta_2 > 0$. Die verschiedenen Primfaktoren $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \ldots$ von 2 mögen in ϑ_2 au in den Potenzen $\mathfrak{l}^c, \mathfrak{l}'^{c'}, \ldots$ auftreten. Hierbei sind wegen $4 \mid \vartheta_2$ Exponenten $c, c', \ldots > 0$. Es mögen $\varrho, \varrho', \ldots$ die zu $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \ldots$ gerende Bedeutung des ϱ von Hilfssatz 4 haben. Dann läßt sich die

Zahl $\frac{\vartheta_3}{\varrho^{c-1}\varrho'^{c'-1}\dots}$ in der Form $\frac{\vartheta_3}{\vartheta_4}$ schreiben, wo ϑ_3, ϑ_4 ganz sind, ϑ_4 zu 2 teilerfremd ist und ϑ_3 jedes der Primideale $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \dots$ in genau erster Potenz enthält. Nun setze ich

$$\vartheta_3 \vartheta_4 = \xi.$$

Dann ist $\xi \succ 0$, weil $\vartheta_2, \varrho, \varrho', \dots$ sämtlich $\succ 0$ sind. Ferner ist $(\xi, 4) = \mathfrak{l}\mathfrak{l}' \dots$; $-\xi$ ist also keine Quadratzahl, und jedes der Primideale $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \dots$ teilt nach Satz IV der Einleitung die Relativdiskriminante des relativquadratischen Körpers $K(\sqrt{-\xi})$. Folglich läßt sich nach Hilfssatz 3 die ganze Zahl ξ als Summe von drei Quadraten, also a fortiori als Summe von vier Quadraten darstellen. Nun ist aber

$$\vartheta = \frac{\xi}{(2\vartheta_1\vartheta_4)^2}\varrho^{c-1}\varrho'^{c'-1}\dots;$$

und hierin sind nach Hilfssatz 4 die Zahlen $\varrho, \varrho', \dots$ als Summen von vier Quadraten darstellbar. Nach der bekannten Identität von Lagrange läßt sich also auch das Produkt $\xi\varrho^{c-1}\varrho'^{c'-1}\dots$ in vier Quadrate zerlegen, also auch die gegebene Zahl $\vartheta \neq 0$.

Für $\vartheta = 0$ aber ist der Satz trivial.

Anmerkungen. 1. In der Zerlegung $\vartheta = \sum_{\nu=1}^{4} \eta_\nu^2$ einer total positiven *ganzen* Zahl ϑ in vier Quadrate können die Basen η_ν nicht immer ganzzahlig gewählt werden. Liegt z. B. ein quadratischer Zahlkörper $K(\sqrt{m})$ mit quadratfreiem $m \equiv 3 \pmod 4$ vor, so hat bekanntlich jede ganze Zahl desselben die Form $\eta_\nu = a_\nu + b_\nu\sqrt{m}$ mit ganzen rationalen a_ν, b_ν; dann ist aber in $\sum_{\nu=1}^{4} \eta_\nu^2$ der Koeffizient von $\sqrt{m}$ durch 2 teilbar, was natürlich nicht für jedes ϑ der Fall ist. Es dürfte recht schwierig sein, zu entscheiden, ob in allen Zahlkörpern die bei der Zerlegung der total positiven Zahlen in vier Quadrate auftretenden Nenner oder auch nur deren Primidealteiler aus einem endlichen Wertevorrat gewählt werden können oder nicht (vgl. § 6).

2. Es gibt Körper, in denen jede Zahl in zwei Quadrate zerlegt werden kann; z. B. hat jeder Körper diese Eigenschaft, welcher $\sqrt{-1}$ enthält.

Hilfssatz 5. Es sei $\xi \succ 0$. Es sei m eine natürliche Zahl, a_1 und a_2 zwei rationale Zahlen, $0 \leqq a_1 < a_2$. Dann gibt es eine total positive Zahl α des Körpers K von ξ, so daß $a_1 \prec \alpha^m\xi \prec a_2$ [6] ist.

---

[6]) Dies bedeutet: $a_2 - \alpha^m\xi \succ 0$, $\alpha^m\xi - a_1 \succ 0$.

Beweis. Es seien $K(\xi^{(1)}), \ldots, K(\xi^{(r)})$ sämtliche reellen konjugierten
örper ($r \geqq 1$, da sonst nichts zu beweisen wäre). Es gibt ein reell-
nliges Polynom $P(x)$ vom Grade $\leqq r-1$, das für $x = \xi^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, r)$
n Wert $\sqrt[m]{\frac{a_1+a_2}{2\,\xi^{(\nu)}}}$ hat, wo die Wurzel positiv zu nehmen ist. Dann ist

$$P(\xi^{(\nu)})^m \xi^{(\nu)} = \frac{a_1+a_2}{2},$$

o $< a_2$ und $> a_1$. Ich kann nun die Koeffizienten von $P(x)$ durch
nachbarte rationale Zahlen ersetzen, so daß für ein so entstehendes
ionalzahliges Polynom $R(x)$ auch noch

$$a_1 < R(\xi^{(\nu)})^m \xi^{(\nu)} < a_2, \qquad R(\xi^{(\nu)}) > 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, r)$$

t; dann erfüllt $R(\xi) = \alpha$ die Forderung des Hilfssatzes.

Satz 2. Es sei m eine natürliche Zahl. Jede total positive Zahl
es algebraischen Zahlkörpers K läßt sich als Summe einer *festen* nur
n m und nicht von K abhängigen Anzahl m-ter Potenzen von *total*
sitiven Zahlen des Körpers darstellen.

Beweis. Hilbert hat folgende Vermutung von Hurwitz bewiesen:
seien m und r zwei natürliche Zahlen. Dann gibt es eine natürliche
hl N, rationale Zahlen $a_{1\lambda}, \ldots, a_{r\lambda}$ $(\lambda = 1, \ldots, N)$ und positive rationale
hlen $\varrho_1, \ldots, \varrho_N$, die nur von m und r abhängen, so daß identisch in
$\ldots, x_r$ gilt

$$(x_1^2 + \ldots + x_r^2)^m = \sum_{\lambda=1}^{N} \varrho_\lambda (a_{1\lambda} x_1 + \ldots + a_{r\lambda} x_r)^{2m} \quad [7]). \tag{23}$$

erin sei speziell $r = 5$. Man ersetze in (23) die Zahl m durch $m+1$
d differentiiere zweimal nach x_1; dann wird

$$(x_1^2 + \ldots + x_5^2)^m + 2m x_1^2 (x_1^2 + \ldots + x_5^2)^{m-1} = \sum_{\lambda=1}^{N} (2m+1) \varrho_\lambda a_{1\lambda}^2 (a_{1\lambda} x_1 + \ldots + a_{5\lambda} x_5)^{2m}. \tag{24}$$

Nun führe man an Stelle der x neue vier Reihen von Variablen
$(\varkappa = 1, \ldots, 4)$ ein, die der Bedingung

$$x_1^{(\varkappa)2} + \ldots + x_5^{(\varkappa)2} = 1 \tag{25}$$

nügen sollen. Dann liefert (24) durch Addition der vier entsprechen-
n Identitäten

$$2 + m \sum_{\varkappa=1}^{4} x_1^{(\varkappa)2} = \sum_{\varkappa=1}^{4} \sum_{\lambda=1}^{N} \frac{2m+1}{2} \varrho_\lambda a_{1\lambda}^2 (a_{1\lambda} x_1^{(\varkappa)} + \ldots + a_{5\lambda} x_5^{(\varkappa)})^{2m}.$$

[7]) Der einfachste elementare Beweis der Existenz einer solchen Identität findet
h in der unten zitierten Arbeit von Stridsberg.

Bedeutet q den Hauptnenner der N rationalen Zahlen $\frac{2m+1}{2}\varrho_\lambda a_{1\lambda}^2$, so ist $\frac{2m+1}{2}\varrho_\lambda a_{1\lambda}^2 q^{2m}$ ganz rational und $\geqq 0$. Folglich gilt

$$2+m\sum_{\varkappa=1}^{4} x_1^{(\varkappa)2} = \sum_{\nu=1}^{N'} X_\nu^{2m}, \tag{26}$$

wo X_ν eine lineare rationalzahlige Funktion von $x_1^{(\varkappa)}, \ldots, x_5^{(\varkappa)}$ $(\varkappa = 1, \ldots, 4)$ bedeutet und $N' = 2(2m+1)Nq^{2m} \max\limits_{\lambda=1,\ldots,N}(\varrho_\lambda a_{1\lambda}^2)$ ist. N' hängt nur von m ab.

Nun sei ξ eine total positive Zahl aus K. Nach Hilfssatz 5 gibt es ein $\alpha > 0$, so daß $2 < \alpha^m \xi < 3$ ist; dann ist also die Zahl $\frac{\alpha^m \xi - 2}{m} > 0$ und < 1. Da sie > 0 ist, so läßt sie nach dem Hauptsatz eine Zerlegung in vier Quadrate zu; es seien $x_1^{(\varkappa)}$ $(\varkappa = 1, \ldots, 4)$ die Basen dieser Quadrate:

$$\frac{\alpha^m \xi - 2}{m} = \sum_{\varkappa=1}^{4} x_1^{(\varkappa)2}. \tag{27}$$

Da sie < 1 ist, so ist jede der vier Zahlen $1 - x_1^{(\varkappa)2} > 0$; es gibt daher nach dem Hauptsatz für jedes $\varkappa$ vier Zahlen $x_2^{(\varkappa)}, x_3^{(\varkappa)}, x_4^{(\varkappa)}, x_5^{(\varkappa)}$ des Körpers, welche (25) Genüge leisten. Aus (26) und (27) folgt aber

$$\xi = \sum_{\nu=1}^{N'} \left(\frac{X_\nu^2}{\alpha}\right)^m \quad \text{mit} \quad \frac{X_\nu^2}{\alpha} > 0,$$

q. e. d.

Anmerkungen. 1. Satz 2 ist für $m = 2$ nicht im Hauptsatz enthalten, da dort die Basen der Quadrate nicht total positiv zu sein brauchen.

2. Daß die Hilbertsche Methode zur Lösung des Waringschen Problems, wie sie beim Beweise von Satz 2 benutzt wurde, sich abkürzen ließ, liegt natürlich daran, daß Ganzzahligkeit nicht gefordert wird. Aus demselben Grunde erklärt sich die sonderbare Tatsache, daß der Satz für $m = 3$ ganz leicht und auf dem elementarsten Wege bewiesen werden kann. Nach Le Besgue gilt nämlich folgende Identität:

$$p = \left(\frac{p}{6q^2}\right)^3 \{(2-a)^3 + a^3(b-1)^3 + b^3(c-1)^3 + c^3\}, \tag{28}$$

wo $a = 1 + \frac{6q^3}{p}$, $b = 2 - \frac{3}{1+a^3}$, $c = 2 - \frac{3}{1+b^3}$ gesetzt ist. Hierin sind die Kuben positiv für $c > 1$, $b > 1$, $a < 2$, und diese Bedingungen liefern sukzessive

$$b > \sqrt[3]{2}, \qquad a > \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{2}}}, \qquad \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{2}}} < 1 + \frac{6q^3}{p} < 2; \tag{29}$$

ıd in der letzten Ungleichung ist $\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{2}}} < 2$ [8]). Ist nun $p \neq 0$ eine tal positive Zahl des Körpers K, so wähle man nach Hilfssatz 5 eine tal positive Zahl q aus K derart, daß $r < q^3 \frac{6}{p} < 1$ ist, wo r einen hten rationalen Bruch $> \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{2}}} - 1$ bedeutet. Für dieses q gelten e Ungleichungen (29); und (28) liefert eine Zerlegung von p in vier total ositive Kuben.

3. Landau hat auf elementare Art bewiesen, daß jede total positive ahl als Summe von Quadratzahlen des Körpers dargestellt werden kann. ies läßt sich für den Fall eines total reellen Körpers fast unmittelbar Evidenz setzen. Ist nämlich ξ total reell und total positiv, so sind in r irreduziblen Gleichung für ξ

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - + \ldots + (-1)^n a_n = 0$$

e rationalen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ sämtlich > 0. Nun ist

$$\xi(a_{n-1} + a_{n-3}\xi^2 + \ldots) = a_n + a_{n-2}\xi^2 + a_{n-4}\xi^4 + \ldots;$$

ler, wenn $a_{n-1} + a_{n-3}\xi^2 + \ldots = \nu$ gesetzt wird,

$$= \frac{1}{\nu^2}(a_{n-1} + a_{n-3}\xi^2 + \ldots)(a_n + a_{n-2}\xi^2 + \ldots) = \frac{1}{\nu^2}(b_0 + b_1\xi^2 + b_2\xi^4 + \ldots),$$

o die Zahlen $b_0, b_1, b_2, \ldots$ positiv rational sind. Ihre Anzahl ist, da $^{(n-1)}$ die höchste rechts auftretende Potenz von ξ^2 ist, genau n; jede on ihnen zerfällt nach dem Satz von Lagrange in vier Quadrate; folgch läßt sich ξ in $4n$ Quadrate zerlegen.

§ 4.

Aus dem Hauptsatz hat Hilbert gefolgert, daß jedes rationalzahlige ositiv definite Polynom sich als Quotient von Quadratsummen rationalahliger Polynome darstellen läßt; und Landau hat sogar gezeigt, daß an jedes solche Polynom als Summe von acht Quadraten rationalzahliger olynome schreiben kann. Es ist leicht, diesen Satz auf trigonometrische olynome zu übertragen.

---

[8]) Es ist $54 < 125$, $3\sqrt[3]{2} < 5$, $1 + \sqrt[3]{2} < 8(2 - \sqrt[3]{2})$, $\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt[3]{2}}{2-\sqrt[3]{2}}} < 2$.

Satz 3. Es sei

$$f(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi$$

ein trigonometrisches Polynom mit rationalen Koeffizienten a_ν, b_ν. $f(\varphi)$ sei nicht-negativ definit, d. h. für alle reellen φ sei $f(\varphi) \geqq 0$. Dann gibt es eine Darstellung von $f(\varphi)$ als Summe von acht Quadraten rationalzahliger trigonometrischer Polynome in $\frac{\varphi}{2}$:

$$(30) \quad f(\varphi) = \sum_{\lambda=1}^{8} g_\lambda\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2, \qquad g_\lambda\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu^{(\lambda)} \cos \nu \frac{\varphi}{2} + d_\nu^{(\lambda)} \sin \nu \frac{\varphi}{2}.$$

Beweis. Ich setze $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = x$, dann ist $\cos\varphi = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, $\sin\varphi = \frac{2x}{1+x^2}$, und $f(\varphi)(1+x^2)^n$ geht über in ein rationalzahliges Polynom vom Grade $2n$, das für keinen reellen Wert seiner Variablen x negativ ist. Nach dem erwähnten Landauschen Satze ist daher

$$f(\varphi)(1+x^2)^n = \sum_{\lambda=1}^{8} h_\lambda(x)^2,$$

wo $h_\lambda(x)$ ein rationalzahliges Polynom n-ten Grades in x bedeutet. Nun ist aber $\frac{1}{1+x^2} = \cos^2 \frac{\varphi}{2}$, also $f(\varphi) = \sum_{\lambda=1}^{8} \left\{\cos^n \frac{\varphi}{2}\, h_\lambda\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)\right\}^2$. Die Funktion $\cos^n \frac{\varphi}{2}\, h_\lambda\left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)$ ist ein homogenes Polynom n-ten Grades in $\cos \frac{\varphi}{2}$ und $\sin \frac{\varphi}{2}$, das die Form $g_\lambda\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ aus (30) erhält, wenn jedes Produkt $\cos^\varkappa \frac{\varphi}{2} \sin^{n-\varkappa} \frac{\varphi}{2}$ $(\varkappa = 0, \ldots, n)$ linear und rationalzahlig durch $\cos \nu \frac{\varphi}{2}$ und $\sin \nu \frac{\varphi}{2}$ $(\nu = 0, \ldots, n)$ ausgedrückt wird, was bekanntlich möglich ist.

Nach den oben genannten Sätzen von Hilbert und Landau kann man jedes definite Polynom in eine solche Form setzen, daß seine charakteristische Eigenschaft ausgedrückt wird. Etwas Analoges läßt sich für Polynome bewirken, die für alle positiven Werte der Variablen selbst positiv sind.

Satz 4. Es sei $f(x)$ ein rationalzahliges Polynom n-ten Grades, das für alle positiven x selbst positiv ist. Dann gilt eine Darstellung

$$(31) \quad f(x) = c \frac{\prod_{\nu=1}^{n_1} (x + q_{\nu,1}(x))}{\prod_{\nu=1}^{n_2} (x + q_\nu^*(x))},$$

wo c eine rationale Zahl >0, $q_\nu(x)$ und $q_\nu^*(x)$ Summen von vier Quadraten rationalzahliger Polynome in x bedeuten. Deren Grade, sowie die Zahlen n_1 und n_2 hängen nur von n ab.

Beweis. Jeder irreduzible Faktor von $f(x)$ ist >0 für $x>0$: ferner hat das Produkt zweier Ausdrücke von der Form der rechten Seite von (31) wieder diese Form. Ich darf daher $f(x)$ als irreduzibel voraussetzen. Es sei $f(\xi)=0$; dann ist nach Voraussetzung $-\xi$ total positiv. Nach dem Hauptsatze gibt es also vier rationalzahlige Polynome $g_\nu(x)$ ($\nu=1,\ldots,4$) vom Grade $n-1$, so daß $-\xi=\sum_{\nu=1}^{4} g_\nu(\xi)^2$ ist. Daraus folgt

$$x+\sum_{\nu=1}^{4} g_\nu(x)^2 = f(x)f_1(x), \tag{32}$$

wo $f_1(x)$ ein rationalzahliges Polynom ist, und zwar vom Grade $n-2$ für $n\geqq 2$, vom Grade 0 für $n=1$. $f_1(x)$ hat also kleineren Grad als $f(x)$; ferner ist nach (32) $f_1(x)>0$ für $x>0$. Ist nun $f_1(x)$ nicht konstant, also $n>2$, so wende man auf jeden der endlich vielen irreduziblen Faktoren von $f_1(x)$ dieselben Schlüsse an. So ergibt sich mit Rücksicht auf (32) nach endlich vielen Schritten für $f(x)$ ein Ausdruck der Form (31).

Für eine weitere Anwendung des Hauptsatzes gebrauche ich einen Hilfssatz, der an und für sich Interesse besitzt und mit gewissen Sätzen von Laguerre zusammenhängt. Ein Beweis desselben, der von E. Meißner gegeben worden ist, wird durch geometrische Betrachtungen erschwert; daher möchte ich ihn hier rein algebraisch beweisen[9]). Der Satz lautet:

Hilfssatz 6. Jedes reellzahlige Polynom $f(x)$, das für alle positiven x positiv ist, ist Quotient zweier positivzahliger[10]) Polynome.

Beweis. Es gilt eine Zerlegung

$$f(x)=a\prod_{\nu=1}^{r_1}(x-x_\nu)\prod_{\nu=1}^{r_2}\varphi_\nu(x);$$

hierin bedeutet a eine Zahl >0, r_1 die Anzahl der reellen Wurzeln von $f(x)$, $x_1,\ldots,x_{r_1}$ diese Wurzeln selbst, $2r_2$ die Anzahl der imaginären Wurzeln von $f(x)$, $\varphi_\nu(x)$ ein reellzahliges definites quadratisches Polynom der Form $x^2-\alpha_\nu x+\beta_\nu$. r_1 oder r_2 können auch 0 sein; dann fallen die entsprechenden Faktoren eben fort. Nach Voraussetzung ist $f(x)>0$.

[9]) Der Satz ist in allgemeineren Resultaten von Curtiss oder Fekete und Pólya enthalten, deren Beweise jedoch schwieriger sind.

[10]) D. h. alle Koeffizienten sind $\geqq 0$.

also $\neq 0$, für $x > 0$; demnach sind die Zahlen $x_1, \ldots, x_{r_1} \leqq 0$. Daher ist $a\prod_{\nu=1}^{r_1}(x - x_\nu)$ ein positivzahliges Polynom. Nun ist das Produkt zweier positivzahliger Polynome wieder positivzahlig; der Satz braucht also nur für das definite Polynom $\varphi_\nu(x)$ bewiesen zu werden. Von den beiden reellen Zahlen $-\alpha_\nu$ und β_ν ist $\beta_\nu > 0$; ist auch $-\alpha_\nu > 0$ oder $= 0$, so ist $\varphi_\nu(x)$ selbst positivzahlig. Daher bleibt nur noch der Fall zu behandeln, daß $\alpha_\nu > 0$ ist. Es sei $\varphi_\nu(x) = \varphi(x)$, $\alpha_\nu = \alpha$, $\beta_\nu = \beta$.

Unter n verstehe ich eine später näher zu fixierende Zahl und setze

$$\psi(x) = (x^2 + \beta)^{2n} - (\alpha x)^{2n}.$$

Die Koeffizienten von $\psi(x)$ sind alle $\geqq 0$ mit etwaiger Ausnahme des Koeffizienten von x^{2n}, welcher den Wert $c_n = \binom{2n}{n}\beta^n - \alpha^{2n}$ besitzt. Da $\varphi(x)$ definit ist, so ist die Diskriminante $\alpha^2 - 4\beta < 0$, also die positive Zahl $q = \frac{\alpha^2}{4\beta} < 1$. Es gilt

$$\frac{\sqrt{n}\,c_n}{(4\beta)^n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}}\binom{2n}{n} - \sqrt{n}\,q^n; \tag{33}$$

da nun nach der Stirlingschen Formel

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^{2n}}\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}\sqrt{2\pi}}{(n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi})^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

ist und $\sqrt{n}\,q^n$ mit wachsendem n gegen 0 strebt, so läßt sich ein $n = n(q)$ derart wählen, daß die linke Seite von (33), also auch c_n, > 0 ist. Bei dieser Wahl von n ist das Polynom $\psi(x)$ positivzahlig. Dann ist

$$\varphi(x) = x^2 - \alpha x + \beta = \frac{(x^2+\beta)^{2n} - (\alpha x)^{2n}}{\sum_{\lambda=0}^{2n-1}(x^2+\beta)^{2n-1-\lambda}(\alpha x)^\lambda} = \frac{\psi(x)}{\chi(x)}$$

Quotient zweier positivzahliger Polynome $\psi(x)$ und $\chi(x)$.

Zusatz. Die Darstellung kann so gewählt werden, daß die Koeffizienten von Zähler und Nenner dem Körper der Koeffizienten von $f(x)$ angehören.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f(x)$ nicht durch x teilbar. Es sei $f(x) = \frac{g_1(x)}{h_1(x)}$ eine Darstellung von $f(x)$ als Quotient positivzahliger Polynome. Ein etwaiger gemeinsamer Faktor x in g_1 und h_1 könnte fortdividiert werden, ohne die Art der Darstellung zu ändern; daher kann

$$g_1(x) = a + \ldots + bx^m$$

nach steigenden Potenzen von x geordnet) mit $a > 0$, $b > 0$, $m \geqq 1$ angenommen werden. Ich setze nun

$$g_2(x) = (1 + x + \ldots + x^{m-1}) g_1(x);$$

dann hat für *jedes* ν der Reihe $0, 1, \ldots, 2m-1$ der Koeffizient von x^ν in $g_2(x)$ einen *positiven* Wert. Da aber $g_2(x) = (1 + x + \ldots + x^{m-1}) f(x) h_1(x)$ eine stetige Funktion der Koeffizienten von $h_1(x)$ ist, so kann man diese Koeffizienten durch benachbarte nicht negative *rationale* Zahlen derart ersetzen, daß, wenn auf diese Weise das Polynom $(1 + x + \ldots + x^{m-1}) h_1(x)$ in $h(x)$ übergeht, die Koeffizienten von $h(x) f(x) = g(x)$ auch noch positiv sind. Nun ist $h(x)$ rationalzahlig; die Koeffizienten von $g(x)$ liegen daher im Körper der Koeffizienten von $f(x)$, und $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ ist die gesuchte Darstellung.

Satz 5. Eine total positive Zahl α erzeuge den algebraischen Zahlkörper K. Dann gibt es zu jeder total positiven Zahl $\xi \neq 0$ aus K zwei Polynome $g(x)$ und $h(x)$ mit *positiven* rationalen Koeffizienten, so daß

$$\xi = \frac{g(\alpha)}{h(\alpha)} \tag{34}$$

ist[11]).

Beweis. Nach dem Hauptsatze gibt es vier rationalzahlige Polynome $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, \ldots, 4)$ derart, daß $\xi = \sum_{\nu=1}^{4} f_\nu(\alpha)^2$ ist; dabei darf angenommen werden, daß die Grade dieser Polynome kleiner als der Grad von K sind. Haben sie also einen gemeinsamen Teiler $x - \lambda$, so ist λ von den Konjugierten zu α verschieden. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß $f_1(x)$ nicht identisch 0 ist; ferner sei $f(x) = 0$ die irreduzible Gleichung für α. Dann gibt es eine natürliche Zahl m, so daß $f_1(x)$ und $f_2(x) + m f(x)$ teilerfremd sind. Da nun $f_2(\alpha) + f(\alpha) = f_2(\alpha)$ ist, so darf man annehmen, daß $f_1(x), \ldots, f_4(x)$ teilerfremd sind, wenn man die Beschränkung über ihren Grad aufhebt. Dann ist das Polynom $\sum_{\nu=1}^{4} f_\nu(x)^2 = \varphi(x)$ positiv definit, also a fortiori > 0 für $x > 0$. Nach Hilfssatz 6 und Zusatz gibt es daher zwei Polynome $g(x)$ und $h(x)$ mit positiven rationalen Koeffizienten, so daß $\varphi(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ ist. Dabei darf ich $h(\alpha) \neq 0$ annehmen, da ich sonst nur die Koeffizienten von $g(x)$ und $h(x)$ durch benachbarte zu ersetzen brauche (vgl. die Überlegung beim Beweis des Zusatzes). Daher gilt (34).

[11]) Daß umgekehrt jede Zahl ξ der Form (34) > 0 ist, ist trivial.

Anmerkungen. 1. Beim Beweise von Satz 5 ist nirgends davon Gebrauch gemacht worden, daß α total positiv ist; der Satz gilt also für jedes algebraische α.

2. An Stelle des Hauptsatzes kann beim Beweise der oben (Satz 2, Anm. 3) erwähnte (elementar beweisbare) Landausche Satz über die Zerlegung total positiver Zahlen in Quadrate benutzt werden.

3. In (34) kann der Nenner $h(\alpha)$ nicht entbehrt werden. Ist z. B. α reell und eine der Konjugierten α' ebenfalls reell und $> \alpha$, so ist $g(\alpha') > g(\alpha)$ für jedes positivzahlige Polynom $g(x)$. Nun gibt es sicher Körperzahlen ξ mit $\xi' < \xi$, und ein solches ξ kann daher nicht die Form $g(\alpha)$ haben.

§ 5.

Es gibt Körper, in denen nicht *jede* total positive Zahl als Summe von *weniger* als vier Quadraten sich darstellen läßt; z. B. gilt dies für den Körper der rationalen Zahlen. Ich stelle im folgenden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür auf, daß eine total positive ganze Zahl ξ als Summe von zwei oder drei Quadraten dargestellt werden kann.

Satz 6. Eine total positive ganze Zahl ξ läßt sich dann und nur dann als Summe von zwei Quadratzahlen schreiben, wenn für alle Primideale $\mathfrak{w} \mid 2\xi$ das Symbol $\left(\frac{\xi, -1}{\mathfrak{w}}\right)$ den Wert $+1$ hat.

Beweis. Damit ξ Summe von zwei Quadraten ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Diophantische Gleichung

$$\xi x^2 - y^2 = z^2 \tag{35}$$

im Körper von ξ lösbar ist (ohne daß x, y, z alle drei 0 sind). Ist nämlich dabei $x = 0$, so ist $-1 = i^2$ Quadratzahl des Körpers, und dann gilt $\xi = \left(\frac{\xi+1}{2}\right)^2 + \left(i\frac{\xi-1}{2}\right)^2$. (35) läßt sich aber nach Satz II der Einleitung dann und nur dann lösen, wenn für alle Primideale $\mathfrak{w} \mid 2\xi$ das Symbol $\left(\frac{\xi, -1}{\mathfrak{w}}\right) = +1$ ist; die Gleichung $\left(\frac{\xi, -1}{1^{(i)}}\right) = +1$ gilt nämlich für alle $\xi > 0$.

Satz 7. Eine total positive ganze Zahl ξ läßt sich dann und nur dann als Summe von drei Quadratzahlen schreiben, wenn für alle Primideale $\mathfrak{l} \mid 2$ die Gleichung $\left(\frac{x, -\xi}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{-1, -1}{\mathfrak{l}}\right)$ eine Lösung x hat.

Beweis. Damit ξ Summe von drei Quadraten ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Diophantische Gleichung

$$\xi x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 = t_1^2 \tag{36}$$

im Körper von ξ in nicht sämtlich verschwindenden ganzen Zahlen

x_1, y_1, z_1, t_1 lösbar ist. Ist nämlich dabei $x_1 = 0$, so ist -1 Summe von zwei Quadraten, und nach (20) jedes ξ des Körpers in drei Quadrate zerlegbar. Ist (36) lösbar, so kann dabei $t_1 \neq 0$ angenommen werden. Es bedeute f die in (36) links stehende ternäre Form und F ihre Adjungierte. Es sei $x \neq 0$ eine simultan mit t_1^2 durch F dargestellte Zahl. Dann gilt, da auch -1 und $+1$ durch f und F simultan darstellbar sind, nach dem Ergebnis von § 1 für alle $\mathfrak{w}$ (d. h. $\mathfrak{w}$ = Primideal und $\mathfrak{p} = 1^{(\mathfrak{s})}$)

$$\left(\frac{-1, \xi}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{-x, -\xi t_1^2}{\mathfrak{w}}\right);$$

also

$$\left(\frac{-1, -1}{\mathfrak{w}}\right)\left(\frac{-1, -\xi}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{-x, t_1^2}{\mathfrak{w}}\right)\left(\frac{-x, -\xi}{\mathfrak{w}}\right), \qquad \left(\frac{x, -\xi}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{-1, -1}{\mathfrak{w}}\right),$$

und letztere Gleichung gilt speziell für $\mathfrak{w} = \mathfrak{l}$. Ist umgekehrt diese Gleichung für x lösbar, wenn $\mathfrak{w} = \mathfrak{l}$ ist, so ist sie für beliebiges $\mathfrak{w}$ lösbar da für alle Primideale $\mathfrak{w} + 2$ das Symbol $\left(\frac{-1, -1}{\mathfrak{w}}\right) = +1$ ist. Aus den Überlegungen von § 2 ergibt sich dann die Lösbarkeit von (36).

Anmerkungen. 1. Die Sätze 6 und 7 liefern natürlich für den Körper der rationalen Zahlen die bekannten Resultate:

Ist $\xi = n$ eine natürliche Zahl und geht die Primzahl $p \neq 2$ in n zu gerader Potenz auf, so ist $\left(\frac{n, -1}{p}\right) = +1$, geht sie in ungerader Potenz auf, so ist $\left(\frac{n, -1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$; es ergibt sich also die Bedingung $p \equiv 1 \pmod 4$ für jede Primzahl p, die in n zu ungerader Potenz aufgeht. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist n Summe von zwei Quadraten.

Ich setze $n = 2^r n'(2 + n';\ r \geqq 0)$, $x = 2^s x'(2 + x';\ s \geqq 0)$; dann ist

$$\left(\frac{x, -n}{2}\right) = \left(\frac{2^s x', -2^r n'}{2}\right) = \left(\frac{x', 2}{2}\right)^r \left(\frac{n', 2}{2}\right)^s \left(\frac{x', -n'}{2}\right)$$
$$= (-1)^{\frac{x'^2-1}{8} r + \frac{n'^2-1}{8} s + \frac{n'+1}{2}\frac{x'-1}{2}}.$$

Damit die rechte Seite den Wert $\left(\frac{-1, -1}{2}\right) = -1$ hat, muß der Exponent ungerade sein, also

$$\frac{x'^2-1}{8} r + \frac{n'^2-1}{8} s + \frac{n'+1}{2}\frac{x'-1}{2} \equiv 1 \pmod 2;$$

und diese Kongruenz läßt sich nur dann durch kein Zahlenpaar s, x' befriedigen, wenn r gerade, $\frac{n'^2-1}{8} \equiv \frac{n'+1}{2} \equiv 0 \pmod 2$, $n' \equiv 7 \pmod 8$ ist, also n von der Form $4^k(8m + 7)$ ist. In jedem anderen Fall ist daher n in drei Quadrate zerlegbar.

2. Von Interesse für die Darstellung definiter Polynome durch Quadrate ist der Fall $\xi = -1$ in einem total imaginären Körper. Nach Satz 7 lautet für dieses ξ die Bedingung für Darstellbarkeit durch drei Quadrate $\left(\frac{x, 1}{\mathfrak{l}}\right) = \left(\frac{-1, -1}{\mathfrak{l}}\right)$, also $\left(\frac{-1, -1}{\mathfrak{l}}\right) = +1$ für jedes $\mathfrak{l} \mid 2$. Dies ist aber nach Satz 6 die Bedingung für Darstellbarkeit durch zwei Quadrate. Läßt sich also -1 als Summe von drei Quadraten darstellen, so läßt es sich auch in zwei Quadrate zerlegen; und dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die Kongruenz $1 + u^2 + v^2 \equiv 0 \pmod 8$ im Körper lösbar ist. Dann ist aber nach (20) jede Zahl des Körpers in drei Quadrate zerlegbar. Damit also die Zahlen eines total imaginären Körpers sämtlich Summen von drei Quadraten sind, ist notwendig und hinreichend, daß die Zahl -1 Summe von zwei Quadraten ist, oder, anders ausgedrückt, daß die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ eine von der trivialen verschiedene Lösung besitzt.

§ 6.

Wie ich bereits oben (Satz 1, Anm. 1) bemerkt habe, weiß man nichts über die Beschaffenheit der Nenner bei der Zerlegung einer ganzen total positiven Zahl in vier Quadrate. Auch die Landausche Methode zur Zerlegung in Quadrate überhaupt liefert darüber nichts. Ich behandle das Problem in diesem Schlußparagraphen mit vollkommen elementaren Mitteln, muß aber die wesentliche Einschränkung machen, daß der Körper *total reell* ist.

Satz 8. Es sei K ein total reeller Körper. Ich bezeichne seine total positiven Einheiten in irgendeiner Reihenfolge mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$. Dann gibt es eine nur von K abhängige natürliche Zahl d derart, daß jede total positive ganze Zahl ξ des Körpers in der Form

$$\xi = \frac{x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 + \ldots}{d} \tag{37}$$

mit ganzen rationalen *nicht negativen* x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ darstellbar ist. $d\xi$ läßt sich also als Summe von total positiven Einheiten schreiben.

Beweis. Der Satz ist trivial für den Körper der rationalen Zahlen; der Grad von K sei also $n \geqq 2$. K ist total reell, besitzt also ein System von $n-1$ total positiven Grundeinheiten $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$. Die $n-1$ linearen Gleichungen

$$\mu_1 \log \eta_1^{(\lambda)} + \ldots + \mu_{n-1} \log \eta_{n-1}^{(\lambda)} = \log \frac{\xi^{(\lambda)}}{\sqrt[n]{N\xi}} \quad (\lambda = 1, \ldots, n-1) \tag{38}$$

[12]) Die Zeichen N und S bedeuten Norm und Spur.

sind eindeutig nach $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ auflösbar; und (38) gilt auch noch für $\lambda = n$. Ich setze $m_1 = [\mu_1], \ldots, m_{n-1} = [\mu_{n-1}]$, $H = \eta_1^{m_1} \ldots \eta_{n-1}^{m_{n-1}}$, $\frac{\xi}{H} = \xi_1$; dann ist die Einheit $H > 0$, also $\xi_1 > 0$, und $N\xi_1 = N\xi$. Der Wahl der Zahlen $m_1, \ldots, m_{n-1}$ zufolge gibt es mit Rücksicht auf (38) zwei positive rationale Zahlen a und A $(0 < a < 1 < A)$, die nur vom Körper abhängen, so daß die Ungleichung

$$a\sqrt[n]{N\xi_1} < \xi_1^{(\lambda)} < A\sqrt[n]{N\xi_1} \tag{39}$$

für jedes $\lambda = 1, \ldots, n$ gilt. Ich unterscheide nun zwei Fälle:

1. $SH \geqq n\frac{A}{a}$ [12]. Dann setze ich

$$\xi_2 = \xi_1 - [a\sqrt[n]{N\xi_1}];$$

dies ist wegen (39) eine total positive ganze Zahl. Ferner ist nach (39)

$$a\sqrt[n]{N\xi_1} = \frac{a}{A} \cdot A\sqrt[n]{N\xi_1} > \frac{a}{An} S\xi_1,$$

$$S\xi_2 \leqq S\xi_1 - n\left[\frac{a}{An} S\xi_1\right] < \left(1 - \frac{a}{A}\right) S\xi_1 + n. \tag{40}$$

Aus der Ungleichung

$$S\xi = S(H\xi_1) > a\sqrt[n]{N\xi_1}\, SH \geqq nA\sqrt[n]{N\xi_1} \geqq S\xi_1$$

folgt dann mit (40)

$$S\xi_2 < \left(1 - \frac{a}{A}\right) S\xi + n.$$

2. $SH < n\frac{A}{a}$. Dann ist a fortiori $H < n\frac{A}{a}$, und aus $NH = 1$ folgt $H > \frac{1}{\left(n\frac{A}{a}\right)^{n-1}}$. Nach (39) ist

$$\frac{a\sqrt[n]{N\xi}}{\left(n\frac{A}{a}\right)^{n-1}} < \xi^{(\lambda)} < n\frac{A^2}{a}\sqrt[n]{N\xi}. \tag{41}$$

Ich setze in diesem Falle 2.

$$\xi_2 = \xi - \left[\frac{a^n}{(An)^{n-1}}\sqrt[n]{N\xi}\right];$$

dies ist wegen (41) eine total positive ganze Zahl. Ferner ist nach (41)

$$\frac{a^n}{(An)^{n-1}}\sqrt[n]{N\xi} = n\left(\frac{a}{An}\right)^{n+1} \cdot n\frac{A^2}{a}\sqrt[n]{N\xi} > \left(\frac{a}{An}\right)^{n+1} S\xi,$$

$$S\xi_2 \leqq S\xi - n\left[\left(\frac{a}{An}\right)^{n+1} S\xi\right] < \left(1 - n\left(\frac{a}{An}\right)^{n+1}\right) S\xi + n. \tag{42}$$

Nun sei $q = n\left(\frac{a}{An}\right)^{n+1}$; dann ist $0 < q < \frac{a}{A} < 1$, und nach (40) und (42) in jedem der Fälle 1., 2.

$$S\xi_2 < (1-q) S\xi + n, \qquad \xi_2 > 0 \text{ und ganz;} \tag{43}$$

ferner ist

$$\xi = H\xi_1 = [a\sqrt[n]{N\xi}]\,H + \xi_2 H, \quad \text{resp.} \quad \xi = \left[\frac{a^n}{(An)^{n-1}}\sqrt[n]{N\xi}\right] + \xi_2.$$

Jetzt verfahre ich mit ξ_2 genau so wie vorhin mit ξ; es ergibt sich analog zu (43)

$$S\xi_4 < (1-q)S\xi_2 + n, \qquad \xi_4 > 0 \text{ und ganz},$$

mit

$$\xi_2 = H_2\xi_3 = [a\sqrt[n]{N\xi_2}]\,H_2 + \xi_4 H_2, \quad \text{resp.} \quad \xi_2 = \left[\frac{a^n}{(An)^{n-1}}\sqrt[n]{N\xi_2}\right] + \xi_4;$$

und ebenso erhält man allgemein für $k = 1, 2, 3, \ldots$, wenn $H_0 = H$, $\xi_0 = \xi$ gesetzt wird,

(44) $$S\xi_{2k} < (1-q)S\xi_{2k-2} + n, \qquad \xi_{2k} > 0 \text{ und ganz},$$

(45) $$\xi_{2k-2} = H_{2k-2}\xi_{2k-1} = [a\sqrt[n]{N\xi_{2k-2}}]\,H_{2k-2} + \xi_{2k}H_{2k-2},$$

$$\text{resp.} \quad \xi_{2k-2} = \left[\frac{a^n}{(An)^{n-1}}\sqrt[n]{N\xi_{2k-2}}\right] + \xi_{2k},$$

wobei ξ_{2k-2}, ξ_{2k-1}, ξ_{2k}, H_{2k-2} den Zahlen ξ, ξ_1, ξ_2, H entsprechen.

Ist nun bereits $S\xi < \frac{2n}{q}$, so wende man das eben geschilderte Verfahren überhaupt nicht an. Ist aber $S\xi \geqq \frac{2n}{q}$, so ist nach (44)

$$S\xi_2 < (1-q)S\xi + \tfrac{q}{2}S\xi = \left(1 - \tfrac{q}{2}\right)S\xi < S\xi.$$

Ist auch noch $S\xi_2 \geqq \frac{2n}{q}$, so ist ebenso

$$S\xi_4 < \left(1 - \tfrac{q}{2}\right)S\xi_2 < \left(1 - \tfrac{q}{2}\right)^2 S\xi;$$

allgemein folgt also aus $S\xi_{2k-2} \geqq \frac{2n}{q}$ nach (44) die Ungleichung

$$S\xi_{2k} < \left(1 - \tfrac{q}{2}\right)^k S\xi.$$

Da nun $\left(1 - \frac{q}{2}\right)^k$ mit wachsendem k gegen 0 strebt, so gibt es ein k der Reihe 0, 1, 2, ... derart, daß $S\xi_{2k} < \frac{2n}{q}$ ist. Dann gehört aber die total positive ganze Zahl ξ_{2k} einem *endlichen* Wertevorrat an; und ferner gilt wegen (45) eine Zerlegung

(46) $$\xi = a_1 E_1 + \ldots + a_k E_k + \xi_{2k} E,$$

wo $E_1, \ldots, E_k, E$ total positive Einheiten und $a_1, \ldots, a_k$ *nicht negative* ganze rationale Zahlen bedeuten.

Ich brauche also den Satz nur für die endlich vielen total positiven nzen Zahlen ζ mit $S\zeta < \frac{2n}{q}$ zu beweisen. Nun sei $Q = Q(\zeta)$ die narliche Zahl

$$Q = \left[n! \left(\frac{A}{a}\right)^{n-1} \frac{S\zeta}{\min(\zeta^{(1)}, \ldots, \zeta^{(n)})} \right] > n! \left(\frac{A}{a}\right)^{n-1}, \tag{7}$$

it den Zahlen a und A aus (39). Für jedes $\lambda = 1, \ldots, n$ gibt es eine total sitive Einheit ε_λ derart, daß $\varepsilon_\lambda^{(\varkappa)} < 1$ für $\varkappa \neq \lambda$, aber $Q < \varepsilon_\lambda^{(\lambda)} < \frac{A}{a} Q$ ist. der Determinante $|\varepsilon_\lambda^{(\varkappa)}|$ $(\varkappa = 1, \ldots, n;\ \lambda = 1, \ldots, n)$ sind also die lemente der Hauptdiagonale zwischen Q und $\frac{A}{a} Q$ gelegen, alle andern er zwischen 0 und 1. Daher ist nach (47)

$$|\varepsilon_\lambda^{(\varkappa)}| > Q^n - (n! - 1)\left(\frac{A}{a} Q\right)^{n-1} > Q^{n-1}\left\{ Q - n! \left(\frac{A}{a}\right)^{n-1} \right\} > 0.$$

edeutet ferner $E_{\varkappa\lambda}$ die Unterdeterminante von $\varepsilon_\lambda^{(\varkappa)}$, so ist

$$E_{\varkappa\varkappa} > Q^{n-1} - ((n-1)! - 1)\left(\frac{A}{a} Q\right)^{n-2},$$

$$E_{\varkappa\lambda} > -(n-1)! \left(\frac{A}{a} Q\right)^{n-2}.$$

Ich setze nun

$$\zeta^{(\varkappa)} = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda \varepsilon_\lambda^{(\varkappa)} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, n);$$

nn ist

$$|\varepsilon_\lambda^{(\varkappa)}| z_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{n} E_{\varkappa\lambda} \zeta^{(\varkappa)} > Q^{n-1} \zeta^{(\lambda)} - (n-1)! \left(\frac{A}{a} Q\right)^{n-2} S\zeta$$
$$= Q^{n-2} \zeta^{(\lambda)} \left\{ Q - (n-1)! \left(\frac{A}{a}\right)^{n-2} \frac{S\zeta}{\zeta^{(\lambda)}} \right\},$$

so nach (47) $z_\lambda > 0$. Außerdem sind die z_λ rational. Folglich gibt es *türliche* Zahlen $y_1, \ldots, y_n, d$, so daß $\zeta = \frac{y_1 \varepsilon_1 + \ldots + y_n \varepsilon_n}{d}$ ist; und da r endlich viele ζ in Frage kommen, läßt sich für alle dasselbe d wählen. ann ist zugleich für jedes total positive ganze ξ die Zahl $d\xi$ nach (46) Summe von total positiven Einheiten darstellbar.

Anmerkung. Auf der rechten Seite von (37) sind wegen $dS\xi = \Sigma x_\nu S\varepsilon_\nu \geqq n \Sigma x_\nu$ höchstens $\left[\frac{dS\xi}{n}\right]$ von den x_ν von 0 verschieden. Da (für $n > 1$) beliebig kleine ganze total reelle total positive Zahlen gibt, nn offenbar keine endliche Basis der Form (37) existieren.

Satz 9. Es sei K ein total reeller algebraischer Zahlkörper. Es gibt eine nur von K abhängige natürliche Zahl t derart, daß jede ganze total positive Zahl ξ des Körpers K in der Form

$$\xi = \left(\frac{\vartheta_1}{t}\right)^2 + \left(\frac{\vartheta_2}{t}\right)^2 + \cdots \tag{48}$$

mit *ganzen* $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$ aus K dargestellt werden kann.

Beweis. Nach Satz 8 gibt es ein natürliches $d = d(K)$ und gewisse total positive Einheiten $E_1, E_2, \ldots$ (unter denen auch gleiche vorkommen können), so daß

$$\xi = \frac{E_1}{d^2} + \frac{E_2}{d^2} + \cdots$$

ist. Jede Einheit E kann nun in die Form $E_0 \bar{E}^2$ gesetzt werden, wo E_0 eine Einheitswurzel oder das Produkt aus einer Einheitswurzel mit einer oder mehreren *verschiedenen Grund*einheiten bedeutet und, wie auch $\bar{E}$ in K liegt. E_0 gehört also einem endlichen Wertevorrat an. Ist $E > 0$, so ist auch $E_0 > 0$. Dann läßt sich, wie in der Anmerkung 3 zu Satz 2 elementar bewiesen wurde, E_0 im Körper K in Quadrate zerlegen. Für jede der endlich vielen Möglichkeiten für E_0 denke ich mir eine solche Zerlegung gebildet; darauf wähle ich eine natürliche Zahl d', die durch jeden Nenner der hierbei auftretenden endlich vielen Quadratbasen teilbar ist. Dann lassen sich also die Zahlen $d'^2 E_0$ als Summen von ganzzahligen Quadraten darstellen, und das gleiche gilt von $d'^2 E = (d'\bar{E})^2 E_0$. Ich nehme jetzt für E speziell die total positiven Einheiten $E_1, E_2, \ldots$ und erhalte eine Darstellung von $(dd')^2 \xi$ als Summe von *ganzen* Quadratzahlen aus K, so daß die Konstante t des Satzes $= dd'$ gewählt werden kann.

Anmerkung. Für die Anzahl der Summanden auf der rechten Seite von (48) ergibt sich auf diesem Wege keine von ξ oder gar von K freie Schranke. Aus (48) läßt sich nur entnehmen, daß diese Anzahl $\leqq \left[\frac{t^2 S\xi}{n}\right]$ ist, wo n den Grad von K bedeutet.

Literaturverzeichnis[13]).

Curtiss, D. R., The degree of a Cartesian multiplier. Bulletin of the American Mathematical Society, Ser. 2, **20** (1913), S. 19–26.

— An extension of Descartes' rule of signs. Mathematische Annalen **73** (1913), S. 424–435.

[13]) Während der Korrektur erschien die Arbeit: L. J. Mordell, On the representation of algebraic numbers as a sum of four squares. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. XX (1921), S. 250—256. Hierin wird der Hilbertsche Satz für kubische Zahlkörper bewiesen.

kete, M., und Pólya, G., Über ein Problem von Laguerre. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **34** (1912), S. 89—120.

jiwara, M., Über die Darstellung binärer Formen als Potenzsummen. The science reports of the Tôhoku Imperial University **2** (1913), S. 55—62.

lbert, D., Grundlagen der Geometrie. 1. Aufl. enthalten in: Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen. Leipzig (B. G. Teubner), 1899, S. 80—85; 2. Aufl. 1903, S. 78—79; 3. Aufl. 1909, S. 113—115; 4. Aufl. 1913, S. 104—107.

The Foundations of Geometry. Authorized Translation by E. J. Townsend. Chicago (The Open Court Publishing Company), 1902, S. 116—121.

Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n-ter Potenzen (Waringsches Problem). Mathematische Annalen **67** (1909), S. 281—300.

ndau, E., Über die Darstellung definiter binärer Formen durch Quadrate. Mathematische Annalen **57** (1903), S. 53—64.

Über die Darstellung definiter Funktionen durch Quadrate. Mathematische Annalen **62** (1906), S. 272—285.

Über die Zerlegung total positiver Zahlen in Quadrate. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1919, S. 392—396.

Besgue, V. A., Exercices d'analyse numérique. Paris (Leiber et Faraguet), 1859, S. 147—151.

ißner, E., Über positive Darstellungen von Polynomen. Mathematische Annalen **70** (1911), S. 223—235.

ißner, O., Über die Darstellung der Zahlen einiger algebraischer Zahlkörper als Summen von Quadratzahlen des Körpers. Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, **7** (1904), S. 266—268.

Über die Darstellbarkeit der Zahlen quadratischer und kubischer Zahlkörper als Quadratsummen. Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, **9** (1905), S. 202—203.

ridsberg, E., Nagra elementära undersökningar rörande fakulteter och deras aritmetiska egenskaper. Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik **11** (1916/1917), Nr. 25, 52 S.

Göttingen, 27. September 1920.

(Eingegangen am 28. September 1920.)

Über die asymptotische Verteilung gewisser konvergenz erzeugender Faktoren.

Von

Hans Rademacher in Berlin.

Versieht man die Glieder einer divergenten Reihe positiver, monoto gegen Null abnehmender Zahlen abwechselnd mit verschiedenen Vorzeichen so erhält man eine konvergente Reihe, gleichfalls wenn man diese Vor zeichenverteilung periodisch so vornimmt, daß in einer Periode gleich viel positive und negative Zeichen vorkommen. Es liegt danach nahe, nac asymptotischen Eigenschaften beliebiger Vorzeichenverteilungen zu fragen die eine divergente monotone Reihe konvergent machen. In dieser Rich tung liegt ein Satz von Cesàro[1]), der, wenn p_n die Zahl der positive Zeichen unter den ersten n Zeichen ist, besagt, daß zur Konvergen nötig ist

$$\underline{\lim}\,\frac{p_n}{n} \leqq \frac{1}{2} \leqq \overline{\lim}\,\frac{p_n}{n}.$$

Die Sätze I und II der folgenden Arbeit können als Verallgemeine rung dieses Satzes gelten auf den Fall, daß nicht nur die Faktoren ± 1 sondern beliebige komplexe Zahlen zur Erzeugung der Konvergenz a Faktoren in die monotone Reihe eingestreut werden. Zur weiteren Unte suchung der Cesàroschen Vorzeichenverteilung würde es sich dann daru handeln, asymptotische Aussagen über $\left|\frac{p}{n} - \frac{1}{2}\right|$ zu machen. Das geschieh in den Sätzen III und IV, und zwar gleich wieder für allgemeinere Fak toren.

Im Abschnitt II wird dann von Satz III eine Anwendung gemach indem ich zeige, daß eine von Herrn Faber[2]) und von mir[3]) angewandt

[1]) Sur une distribution de signes, Rom. Acc. Lincei Rend. (4) 4_2 (1888), S. 133–13

[2]) Über stetige Funktionen II, Math. Ann. **69** (1910), S. 372–443, insbesonde S. 395–400.

[3]) Zu dem Borelschen Satz über die asymptotische Verteilung der Ziffern Dezimalbrüchen, Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 306–311, auch **3** (1919), S. 317.

weismethode für den Borelschen Satz über die asymptotische Verteilung r Ziffern in Dezimalbrüchen sich verfeinern läßt bis zum Beweis eines n den Herren Hardy und Littlewood aufgestellten Satzes.

I.

Satz 1. *Es sei* $u_1 > u_2 > \ldots > u_\nu > u_{\nu+1} > \ldots$, $u_\nu \to 0$ *und* $\sum u_\nu$ *divergent;* $e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots$ *seien beliebige komplexe Zahlen. Dann, daß* $\sum_{\nu=1}^{\infty} e_\nu u_\nu$ *konvergent ist, ist es notwendig, daß in der komplexen Zahlenebene der Nullpunkt in allen denjenigen konvexen abgeschlossenen Bereichen liegt, die nur endlich viele der Punkte* $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu$ *nicht enthalten.*

Hierin sei ein konvexer Bereich wie üblich definiert, nur möge er auch ins Unendliche erstrecken dürfen.

Es sei K ein abgeschlossener konvexer Bereich, der höchstens endlich viele Punkte σ_n nicht enthalte. Daß K den Nullpunkt O enthält, ist äquivalent damit, daß seine Projektion auf jede durch O gehende Gerade L den Nullpunkt O enthält. Seine Projektion (eine Strecke, Halbgerade oder die ganze Gerade) enthält die Projektionen höchstens endlich vieler Punkte nicht. Die Gerade L bilde den Winkel φ mit der reellen Achse. Ohne die Anordnung der Projektionen auf L zu ändern, kann man die ganze Figur um $-\varphi$ drehen. Dann ist L die reelle Achse, die σ_n sind übergegangen in $\sigma_n \cdot e^{-i\varphi} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu e^{-i\varphi}$; die Projektionspunkte haben dann die Abszissen $\Re(\sigma_n e^{-i\varphi})$. Behauptet wird, daß der Nullpunkt in jedem abgeschlossenen Intervall, das höchstens endlich viele $\Re(\sigma_n e^{-i\varphi})$ nicht enthält, liegen muß, also

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, \Re(\sigma_n e^{-i\varphi}) \leqq 0 \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \Re(\sigma_n e^{-i\varphi}).$$

Zum Beweise bemerke man, daß auch $\sum_{\nu=1}^{\infty} e_\nu e^{-i\varphi} u_\nu$ und somit auch $\sum u_\nu \Re(e_\nu e^{-i\varphi})$ als konvergent vorauszusetzen ist. Sei $\Re(e_\nu e^{-i\varphi}) = \gamma_\nu$, $\Re(\sigma_n e^{-i\varphi}) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \Re(e_\nu e^{-i\varphi}) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu = \tau_n$. Dann ist

$$\sum_{\nu=m}^{M} u_\nu \gamma_\nu = \sum_{\nu=m}^{M} u_\nu (\nu\tau_\nu - (\nu-1)\tau_{\nu-1})$$

$$= -u_m (m-1)\tau_{m-1} + \sum_{\nu=m}^{M-1} \nu\tau_\nu (u_\nu - u_{\nu+1}) + u_M M \tau_M.$$

Nach Voraussetzung ist $u_\nu - u_{\nu+1} > 0$. Nimmt man nun entgegen dem ersten Teil der Behauptung (1) an

$$\underline{\lim}\, \Re(\sigma_n e^{-i\varphi}) = \underline{\lim}\, \tau_n = l > 0,$$

so kann m so groß angenommen werden, daß

$$\tau_\nu > \frac{l}{2} \quad \text{für} \quad \nu \geqq m.$$

Dann ist

$$\sum_{\nu=m}^{M} u_\nu \gamma_\nu > -u_m(m-1)\tau_{m-1} + \frac{l}{2}\sum_{\nu=m}^{M-1} \nu(u_\nu - u_{\nu+1}) + \frac{l}{2} M u_M$$

$$= -u_m(m-1)\tau_{m-1} + \frac{l}{2}\{m u_m + u_{m+1} + \ldots + u_M\}.$$

Hierin kann aber wegen der Voraussetzung der Divergenz von $\sum u_\nu$ die Klammer durch Wahl eines hinreichend großen M beliebig groß gemacht werden, was der Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu \gamma_\nu$ widerspricht.

Genau so ist die Annahme

$$\overline{\lim}\, \Re(\sigma_n e^{-i\varphi}) = -l' < 0$$

zu widerlegen, womit der Satz I bewiesen ist. Die in diesem Satze angegebene Lage der Punkte σ_n in der komplexen Ebene läßt sich etwas einfacher angeben, wenn die σ_n beschränkt sind, was z. B. eintritt bei Beschränktheit der e_ν. Es gilt nämlich der

Satz II. *Sind die e_ν beschränkt, $|e_\nu| < R$, so ist für die Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} e_\nu u_\nu$ notwendig, daß der Nullpunkt O in dem kleinsten abgeschlossenen konvexen Bereich K^* liegt, der sämtliche Häufungspunkte der Menge $\{\sigma_n\}$ enthält.*

Zum Beweise dieses Satzes genügt es, nach Satz I zu zeigen, daß K^* der Durchschnitt sämtlicher konvexen Bereiche K ist, die nur endlich viele Punkte σ_n auslassen. Zunächst ist K^* in sämtlichen K enthalten. Denn jeder Bereich K enthält alle Häufungspunkte von $\{\sigma_n\}$. Ein *abgeschlossener* Bereich nämlich, der einen Häufungspunkt von $\{\sigma_n\}$ nicht enthielte, würde auch eine ganze Umgebung dieses Häufungspunktes und somit unendlich viele σ_n nicht enthalten. Jeder Bereich K enthält wegen seiner Konvexität folglich auch den kleinsten abgeschlossenen konvexen Bereich K^*, der alle Häufungspunkte von $\{\sigma_n\}$ enthält.

Der Durchschnitt aller K ist aber auch nicht größer als K^*. Denn man kann eine spezielle Folge von K angeben, die genau K^* als Durchschnitt aufweist. Es sei nämlich K_r der Bereich aller der Punkte, deren

bstand von K^* höchstens gleich ε ist. Es gilt $K_\varepsilon > K^*$, und K_ε ist onvex und abgeschlossen. Der Bereich K_ε läßt aber höchstens endlich iele σ_n aus. Ließe er nämlich unendlich viele σ_n aus, so hätten diese, a $|\sigma_n| < R$, außerhalb oder auf dem Rande von K_ε mindestens einen Häufungspunkt, der daher nicht in K^* enthalten wäre. K_ε ist also ein K. Die Folge $K_{\frac{1}{2}} > K_{\frac{1}{3}} > \ldots > K_{\frac{1}{n}} > \ldots$ hat aber gerade K^* zum Durchchnitt, womit der Beweis geführt ist.

Im Falle *reeller* beschränkter e_ν ist der betrachtete konvexe Bereich K^* ie abgeschlossene Strecke der reellen Achse, die sich von $\underline{\lim}\, \sigma_n$ bis $\overline{\lim}\, \sigma_n$ rstreckt, was für $e_\nu = \pm 1$ auf den in der Einleitung erwähnten Cesàroschen Satz herauskommt.

Über die Lage von K^* läßt sich im allgemeinsten Fall bei beschränkten e_ν noch folgende Bemerkung machen: Die σ_n sind die Schwerunkte der n ersten mit gleichen Massen belegten e_ν. Daraus folgt, daß K^* in jedem konvexen abgeschlossenen Bereich enthalten ist, der nur ndlich viele e_ν nicht enthält.

In den folgenden beiden Sätzen ist nur $u_\nu > u_{\nu+1}$, $u_\nu \to 0$, aber eder die Divergenz von Σu_ν, noch die Beschränktheit der e_ν vorausesetzt. Die Sätze geben einen gewissen Aufschluß über die Verstreuung er σ_n in der Zahlenebene. Unter diesem Gesichtspunkt ist der folgende infache Satz von Wichtigkeit:

Satz III. *Für die Konvergenz von* $\sum_{\nu=1}^{\infty} e_\nu u_\nu$ *ist ferner notwendig, daß* $n\sigma_n = \sum_1^n e_\nu = o\left(\frac{1}{u_n}\right)$ *ist.*

Beweis. Setzen wir $e_\nu u_\nu = a_\nu$ und $\frac{1}{u_n} = U_\nu$, so soll $\sum_{\nu=1} a_\nu$ konvergieren, und $U_1, U_2, \ldots$ wird eine monoton wachsende Folge von der Beschaffenheit $U_\nu \to \infty$ sein. Dann ist nach einem Satze von Kronecker[4]) notwendig:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 U_1 + a_2 U_2 + \ldots + a_n U_n}{U_n} = 0$$

oder in unserer Schreibweise:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu U_\nu = o(U_n),$$

d. h.

$$\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu = o\left(\frac{1}{u_n}\right), \qquad \text{q. e. d.}$$

[4]) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **103** (1886). S. 980—987.

Zu diesem Satz noch zwei kleine Bemerkungen. Erstens darf er offenbar bei Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} u_\nu$ und bei Beschränktheit der e_ν keine Einschränkung aussagen, da dann $\sum e_\nu u_\nu$ jedenfalls konvergiert. Aus der Beschränktheit der e_ν folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu = O(n). \tag{3a}$$

Satz III aber fordert

$$\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu = o\left(\frac{1}{u_n}\right). \tag{3b}$$

Die Konvergenz der monotonen Reihe $\sum u_\nu$ zieht aber bekanntlich nach sich $nu_n \to 0$, so daß also

$$n = o\left(\frac{1}{u_n}\right)$$

ist und somit wegen (3a) die Forderung (3b) in der Tat von selbst erfüllt ist.

Zweitens umfaßt Satz III einen Satz von Cesàro, den dieser wieder für $e_\nu = \pm 1$ bewiesen hat[5]), und der in unserer Schreibweise lautet: „Wenn $n \cdot u_n$ von einem gewissen Index an eine feste positive Zahl übertrifft, so existiert $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} e_\nu = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$“ (welcher Limes nach Satz II nur gleich 0 sein kann). In der Tat haben wir $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} e_\nu = o\left(\frac{1}{nu_n}\right)$, also

$$|\sigma_n| \cdot \text{konst.} < |\sigma_n| \cdot (nu_n) \to 0, \quad \text{also} \quad \sigma_n \to 0.$$

In diesem Falle präzisiert Satz III den Satz II dahin, daß die Menge $\{\sigma_n\}$ nur den Häufungspunkt O besitzt, der also dann den ganzen Bereich K^* ausmacht.

Daß Satz III keine *hinreichende* Bedingung angibt, ersieht man aus folgendem Beispiel: $u_\nu = \frac{1}{\nu}$, $e_\nu = \frac{1}{\log(\nu+1)}$. Hier ist

$$\sum_{1}^{n} e_\nu = \sum_{1}^{n} \frac{1}{\log(\nu+1)} = \frac{1}{\log 2} + \sum_{\nu=2}^{[\sqrt{n}]} + \sum_{\nu=[\sqrt{n}]+1}^{n} < 2 + \sqrt{n} + \frac{n}{\log\sqrt{n}}$$
$$= o(n) = o\left(\frac{1}{u_n}\right).$$

---

[5]) a. a. O. [1]), vgl. auch G. H. Hardy, Note on a theorem of Cesàro, Messenger of Math. 41 (1912), S. 17 – 22.

Dennoch ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} e_\nu u_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu \log(\nu+1)}$ divergent.

Es gilt aber wenigstens der

Satz IV. *Hinreichend für die Konvergenz von* $\sum_{\nu=1}^{\infty} e_\nu u_\nu$ *ist, daß für ein gewisses positives* α

$$\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu = O\left(\frac{1}{u_n^{1-\alpha}}\right)$$

gilt.

Zum Beweise möge $t_n = \sum_{\nu=1}^{n} e_\nu$ gesetzt werden. Dann ist

$$\sum_{\nu=m}^{M} e_\nu u_\nu = -t_{m-1} u_m + \sum_{\nu=m}^{M-1} t_\nu (u_\nu - u_{\nu+1}) + t_M u_M .$$

Nun ist

$$|t_{m-1} u_m| < |t_{m-1} u_{m-1}| = O(u_{m-1}^{\alpha}) \to 0 ,$$

$$t_M u_M = O(u_M^{\alpha}) = O(u_m^{\alpha}) \to 0 ,$$

und wieder bei der Bezeichnung $U_\nu = \frac{1}{u_\nu}$

$$\sum_{\nu=m}^{M-1} t_\nu (u_\nu - u_{\nu+1}) = O\left(\sum_{\nu=m}^{M-1} \frac{u_\nu - u_{\nu+1}}{u_\nu^{1-\alpha}}\right) = O\left(\sum_{\nu=m}^{M-1} \frac{U_{\nu+1} - U_\nu}{U_\nu^{\alpha} U_{\nu+1}}\right)$$

$$= O\left(\sum_{\nu=m}^{\infty} \frac{U_{\nu+1} - U_\nu}{U_\nu^{\alpha} U_{\nu+1}}\right).$$

Nach einem Satz von Pringsheim[6]) ist die letzte Summe aber ein Stück einer konvergenten Reihe, so daß also im ganzen $\sum_{\nu=m}^{M} e_\nu u_\nu$ bei wachsendem m gleichmäßig in M gegen 0 strebt, was zu beweisen war.

Zusatz. Bedient man sich statt des zitierten Pringsheimschen Satzes der logarithmischen Verschärfungen, die dieser Autor seinem Satze gegeben hat[7]), so erkennt man leicht, daß zur Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} e_\nu u_\nu$ schon hinreicht, daß

$$\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu = O\left(\frac{1}{u_n L_k\left(\frac{1}{u_n}\right)\left(\log_k \frac{1}{u_n}\right)^{\alpha}}\right) \qquad (\alpha > 0).$$

[6]) Pringsheim, Über Konvergenz und Divergenz von unendlichen Reihen. Math. Annalen **35** (1890), S. 297—394, insbesondere S. 329.

[7]) l. c. [6]), S. 333.

worin $\log_k$ den $(k-1)$-fach iterierten Logarithmus bedeutet und

$$L_k(x) = \log x \cdot \log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \cdots \cdot \log_k x$$

ist.

In den Sätzen III und IV ist über das Konvergenzverhalten von $\sum_1^\infty u_\nu$ keine Voraussetzung gemacht. Nimmt man aber die Reihe als divergent und zugleich die Bedingung von Satz IV als erfüllt an, so muß natürlich erst recht die Aussage von Satz I gelten. Sie gilt in der Tat, indem die Menge der $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu$ den Nullpunkt zum Häufungspunkt hat. Dies ist wegen der Voraussetzung des Satzes IV, also wegen

$$|\sigma_n| < \frac{C}{n u_n^{1-\alpha}} \qquad (\text{für } n \geqq N)$$

gewiß dann der Fall, wenn $\frac{C}{n u_n^{1-\alpha}}$ den Nullpunkt zum Häufungspunkt hat. Angenommen nun, dies fände nicht statt, so gäbe es also ein $\delta > 0$, so daß für $n > N'$

$$\frac{C}{n u_n^{1-\alpha}} > \delta$$

wäre. Das würde bedeuten

$$C' = \frac{C}{\delta} > n u_n^{1-\alpha},$$

$$u_n < \left(\frac{C'}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

also, im Gegensatz zur Voraussetzung von Satz I, die Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^\infty u_\nu$ implizieren. Die Bedingungen des Zusatzes zu Satz IV würden einen analogen Schluß erlauben. — Auch Satz IV gibt also in gewissem Sinne Aufschluß über die Verteilung der σ_n in der Zahlenebene. — Daß übrigens $\sum_{\nu=1}^{n}{}' e_\nu = O(1)$ für die Konvergenz der betrachteten Reihe gewiß hinreichend ist, sagt schon ein Satz von Abel und Dirichlet aus.

II.

Es soll nun noch eine Anwendung der vorhergehenden Sätze auf das Problem der asymptotischen Verteilung der Ziffern in Dezimalbrüchen gemacht werden. Die folgenden Überlegungen, als Ergänzung zu meiner in der Einleitung erwähnten Arbeit gedacht, werden nicht ausführlich genug sein, um ohne Vergleichung mit jener Arbeit verständlich zu sein.

Ich habe dort, um nachzuweisen, daß die Dezimalbrüche aller Zahlen x des Intervalls 0 bis 1, abgesehen höchstens von einer Nullmenge, z. B. die Ziffer 3 asymptotisch $\frac{1}{9}$ so oft wie alle übrigen Ziffern zusammen enthalten, die „Grundfunktion“

$$(4)\quad \begin{cases} g(x) = (1-k)x & \text{für } 0 \leqq x \leqq \frac{3}{10} \\ g(x) = (1+9k)x - 3k & \text{für } \frac{3}{10} \leqq x \leqq \frac{4}{10} \\ g(x) = (1-k)x + k & \text{für } \frac{4}{10} \leqq x \leqq 1 \end{cases} \qquad (0 < k < 1)$$

eingeführt (dort $f_1(x)$ genannt). Die monotone, stetige Funktion $g(x)$ hängt noch von dem Parameter k ab.

Nun sei $\frac{1}{9} > v_1 > v_2 > \ldots > v_\nu > \ldots$, $v_\nu \to 0$ eine monotone Folge mit den Eigenschaften

$$(5)\quad \sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu \text{ divergent}, \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu^2 \text{ konvergent}.$$

Wähle ich nun in $g(x)$ den Parameter k gleich $v_1, v_2, \ldots, v_\nu, \ldots$, so erhalte ich eine Folge von Grundfunktionen $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_\nu(x), \ldots$

Nun sei $f_1(x) = g_1(x)$. In der Folge von Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ soll nun jede aus der vorhergehenden auf folgende Weise gebildet werden. Um f_{n+1} aus f_n zu konstruieren, teilen wir das Intervall von 0 bis 1 in 10^n gleiche Teile. Sind dann a und b die Abszissen zweier benachbarter Teilpunkte, so ist $f_n(x)$ dazwischen linear

$$f_n(x) = \frac{x-a}{b-a}\{f_n(b) - f_n(a)\} + f_n(a) \quad \text{für } a \leqq x \leqq b.$$

Dann sei in demselben Teilintervall

$$f_{n+1}(x) = g_{n+1}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\{f_n(b) - f_n(a)\} + f_n(a).$$

Ebenso wie in der zitierten Arbeit beweist man dann, daß im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ der Limes

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

gleichmäßig existiert, so daß $f(x)$ stetig und monoton wachsend ist. Durch Überlegungen, die den dort angestellten ganz analog sind, beweist man weiter, daß überall, wo $f'(x)$ existiert,

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

sein muß, worin der Limes rechts gewiß überall dort existiert, wo $f'(x)$ vorhanden ist. Nach einem Satze von Lebesgue tritt dies aber außer in einer Nullmenge im ganzen Intervalle ein.

Ferner ist

$$f_n'(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (1 + e_\nu(x)\, v_\nu),$$

worin

$$(6) \quad \begin{aligned} e_\nu(x) &= 1, \quad \text{wenn } [x \cdot 10^\nu] \equiv 3 \bmod 10 \\ e_\nu(x) &= -1, \quad \text{„ } [x \cdot 10^\nu] \not\equiv 3 \bmod 10. \end{aligned}$$

Außer in einer Nullmenge von Werten x muß also

$$(7) \quad \lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{n} (1 + e_\nu(x)\, v_\nu)$$

existieren. Gleichfalls muß

$$(8) \quad \lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{n} (1 - e_\nu(x)\, v_\nu)$$

außer in einer Nullmenge von Werten x existieren. Das sieht man ein, wenn man in der Definition von $g(x)$ sich k durchweg durch $-k$ ersetzt denkt und mit dieser neuen Grundfunktion $\bar{g}(x)$ die Funktionen $\bar{f}_n(x)$ ebenso gebildet denkt wie vorhin die $f_n(x)$. Diesmal ist wieder $\lim_{n\to\infty} \bar{f}_n(x) = \bar{f}(x)$ eine monotone stetige Funktion und

$$\bar{f}_n'(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (1 - e_\nu(x)\, v_\nu),$$

so daß wegen $\bar{f}_n'(x) \to \bar{f}'(x)$ überall, wo $\bar{f}'(x)$ existiert, der Limes (8) nach Lebesgue außer höchstens in einer Nullmenge vorhanden sein muß.

Wegen der Voraussetzung (5) existieren aber (7) und (8) gemeinsam da und nur da, wo

$$(9) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} e_\nu(x)\, v_\nu$$

konvergent ist, was also außer höchstens in einer Nullmenge der x stattfinden muß[8]). Dazu ist aber nach Satz II zunächst notwendig, daß

$$(10) \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} e_\nu(x) \leqq 0 \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} e_\nu(x)$$

gilt. Ist nun $n_3(x)$ die Anzahl von Ziffern 3, die unter den n ersten

[8]) Wegen der Voraussetzung (5) strebt der eine der beiden Limites (7) und (8) überall dort gegen Null, wo der andere gegen $+\infty$ strebt. Die Grenzfunktionen $f(x)$ und $\bar{f}(x)$ haben also höchstens an einer Nullmenge die Ableitung Null, sind also, im Gegensatz zu der in meiner zitierten Abhandlung konstruierten Funktion, *nicht* „von konstanter λ-Variation".

Ziffern der Dezimalbruchentwicklung von x vorkommen, so kann man wegen der Definition (6) der $e_\nu(x)$ auch schreiben:

$$\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu(x) = 9\,n_3(x) - (n - n_3(x)) = -n + 10\,n_3(x), \tag{11}$$

und nach Eintragung dieser Werte in (10) ergibt sich, wenn man bedenkt, daß die Auszeichnung der Ziffer 3 nicht wesentlich ist, der

Satz V. *Ist $n_\lambda(x)$ die Anzahl von Ziffern λ unter den ersten n Ziffern der Dezimalbruchentwicklung von x $(0 < x < 1)$, so gilt außer in einer Nullmenge der x*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n_\lambda(x)}{n} \leqq \frac{1}{10} \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n_\lambda(x)}{n}.$$

Dieser Satz sagt weniger aus als der Borelsche Satz, in dem außer in einer Nullmenge die Existenz von $\lim_{n\to\infty} \frac{n_\lambda(x)}{n}$ behauptet wird. Wir erhalten aber noch mehr als dies, wenn wir Satz III heranziehen. Danach ist für die Konvergenz von (9) auch notwendig, daß

$$\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu(x) = o\left(\frac{1}{v_n}\right)$$

gilt, was also außer in einer Nullmenge der x stattfinden muß. Unter Berücksichtigung von (11) und der folgenden speziellen, die Forderungen (5) befriedigenden Wahl der v_ν

$$v_\nu = \frac{1}{\nu^{\frac{1}{2}}(\log \nu)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \quad \text{für} \quad \nu > 80, \qquad v_\nu = \frac{(81-\nu)\cdot\frac{1}{9} + \nu \cdot v_{81}}{81} \quad \text{für} \quad 1 \leqq \nu \leqq 80$$

erhält man den

Satz VI. *Unter den Bezeichnungen des Satzes V gilt, außer in einer Nullmenge der x,*

$$\frac{n_\lambda(x)}{n} - \frac{1}{10} = O\left(\frac{(\log n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{n^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{12}$$

Dieser Satz, der den Borelschen einschließt, ist schon, und zwar in etwas schärferer Form, von den Herren Hardy und Littlewood erhalten worden, aber auf einem von dem unseren völlig verschiedenen Wege[9]).

Die Herren Hardy und Littlewood gelangen mit ihren Methoden noch zu einem wichtigen Ergebnis, das die Abschätzung (12) ergänzt

[9]) Some Problems of Diophantine Approximation, Acta Mathem. **37**, S. 155–239, Theorem 1.45 (S. 185). Siehe auch Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig 1914) S. 421.

und ihrer möglichen Verbesserung eine Grenze zieht. Es gilt nämlich der Satz: *Nur* in einer Nullmenge gilt

$$\frac{n_\lambda(x)}{n} - \frac{1}{10} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{10}.$$

Aus diesem Satze soll hier noch eine Konsequenz gezogen werden.

Die Aussagen der beiden letzten Sätze sind für dekadische Bruchentwicklungen gemacht. Für dyadische würden ganz entsprechende Beweise gelten, und die Sätze lauten so:

In einer Menge vom Maße 1 des Intervalls 0 bis 1 gilt

$$\frac{n_0(x)}{n} - \frac{1}{2} = O\left(\frac{(\log n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{n^{\frac{1}{2}}}\right), \tag{12a}$$

und *nur* in einer Menge vom Maße Null

$$\frac{n_0(x)}{n} - \frac{1}{2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{13a}$$

Welche monotone Folge $\{v_\nu\}$ mit den Eigenschaften (5) man also auch immer wählen mag, so kann der oben durchgeführte Schluß niemals auf die Aussage führen, daß (13a) in einer Menge vom Maße 1 gilt.

Entsprechend zu (9) muß man im dyadischen Falle

$$\begin{cases} e_\nu(x) = 1, & \text{wenn} \quad [x \cdot 2^\nu] \equiv 0 \bmod 2, \\ e_\nu(x) = -1, & \text{„} \quad [x \cdot 2^\nu] \equiv 1 \bmod 2 \end{cases} \tag{9a}$$

definieren. Jeder Folge $e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots, e_\nu = \pm 1$, entpricht auch genau eine Zahl x des Intervalls 0 bis 1, deren $e_\nu(x)$-Folge sie gemäß (9a) ist. Würde nun bei einer beliebigen, den Bedingungen (5) genügenden monotonen Folge $\{v_\nu\}$ die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} e_\nu v_\nu, \qquad e_\nu = \pm 1,$$

nur dann konvergieren, wenn

$$\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu = O(\sqrt{n}), \tag{14}$$

so müßte

$$\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu(x) = 2n_0(x) - n = O(\sqrt{n})$$

oder

$$\frac{n_0(x)}{n} - \frac{1}{2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

---

[10]) Folgt aus Theorem 1.47, a. a. O.[9]), S. 187.

uf einer Menge vom Maße 1 stattfinden, im Gegensatz zu Aussage (13a). Folglich muß es Vorzeichenverteilungen $\{e_\nu\}$ geben, die $\sum_{\nu=1}^{\infty} e_\nu v_\nu$ konvergent machen, ohne (14) zu erfüllen. Man erhält somit den

Satz VII. *Ist* $v_1 > v_2 > \ldots > v_\nu > \ldots$, $v_\nu \to 0$ und $\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu^2$ *konvergent, dagegen* $\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$ *divergent, so gibt es Vorzeichenverteilungen, d. h. Folgen* $e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots$, $e_\nu = \pm 1$, *so daß*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} e_\nu v_\nu$$

konvergiert, ohne daß

$$\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu = O(\sqrt{n})$$

ist.

Dieser Satz ist unter seinen besonderen Voraussetzungen eine Ergänzung von Satz IV. Denn aus der Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu^2$ könnte man wegen der Monotonität auf $v_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ schließen, aber damit aus Satz IV nur folgern, daß $\sum_{\nu=1}^{\infty} e_\nu v_\nu$ gewiß konvergiert, sobald $\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu = O\left(\sqrt{n}^{1-\alpha}\right)$, $\alpha > 0$, oder aus dem Zusatz zu Satz IV z. B. daß $\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu = O\left(\frac{\sqrt{n}}{(\log n)^{1+\alpha}}\right)$ für die Konvergenz hinreichend ist.

Einer Mitteilung des Herrn Knopp verdanke ich übrigens eine Konstruktionsvorschrift, durch die man zu einer Reihe mit den in Satz VII vorausgesetzten Eigenschaften stets eine konvergenzerzeugende Vorzeichenverteilung $\{e_\nu\}$ erhält, für die

$$\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu + O(\sqrt{n})$$

ist. Nach dieser Vorschrift wähle man einfach eine Folge von positiven *geraden* Zahlen $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \ldots < \nu_k < \ldots$, so daß erstens

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \nu_k v_{\nu_k}^2$$

konvergiert und zweitens

$$\nu_{k+1}^2 > \nu_k^2 + k\nu_k$$

ausfällt. Die erste Forderung ist wegen $v_\nu \sqrt{\nu} \to 0$ gewiß erfüllbar und

zwar auch unter Erfüllung der zweiten Forderung. Dann werde folgende Vorzeichenverteilung vorgenommen:

$$(15)\quad \begin{aligned} &v_1 - v_2 + v_3 - + \ldots - v_{\nu_1^2}\,| + v_{\nu_1^2+1} + v_{\nu_1^2+2} + \ldots + v_{\nu_1^2+\nu_1}\,| \\ &+ v_{\nu_1^2+\nu_1+1} - + \ldots - v_{\nu_2^2}\,| + v_{\nu_2^2+1} + \ldots + v_{\nu_2^2+2\nu_2}\,| + - \ldots, \end{aligned}$$

d. h. für die Indizes von $\nu_k^2 + k\nu_k + 1$ bis ν_{k+1}^2 erhalten die Glieder abwechselnde Vorzeichen (wobei wegen der Geradheit der ν_k gleichviele $+$ und $-$-Zeichen zur Anwendung gelangen), und vom Index $\nu_k^2 + 1$ bis $\nu_k^2 + k\nu_k$ sind lauter positive Zeichen zu nehmen. Die so gebildete Reihe (15) ist in der Tat konvergent. Denn nimmt man die Gruppen konsekutiver positiver Glieder $(v_{\nu_k^2+1} + \ldots + v_{\nu_k^2+k\nu_k})$ heraus, so bleibt eine alternierende Reihe mit monoton zu Null abnehmenden Gliedern stehen. Wegen

$$v_{\nu_k^2+1} + \ldots v_{\nu_k^2+k\nu_k} < k\nu_k v_{\nu_k^2}$$

bilden aber die in Rede stehenden Gruppen positiver Glieder zusammengenommen eine absolut konvergente Reihe. Für die Vorzeichenverteilung gilt aber bei $n = \nu_k^2 + k\nu_k$

$$\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu > k\nu_k, \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\nu=1}^{n} e_\nu > \frac{k\nu_k}{\sqrt{\nu_k^2 + k\nu_k}} > \frac{k}{\sqrt{2}},$$

letzteres, weil von selbst $\nu_k > k$ ist. Also ist

$$\overline{\lim}\, \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\nu=1}^{n} e_\nu = +\infty, \qquad \sum_{\nu=1}^{n} e_\nu + O(\sqrt{n}).$$

(Eingegangen am 20. November 1920.)

Über affine Geometrie XXXII.

ie Asymptotenebenen eines Flächenpunktes und seine Liesche F_2.

Von

P. Franck in Hamburg.

Mit einem Zusatz von F. Engel in Gießen.

---

§ 1.

Asymptotenebenen, Affinnormale und Regelflächen T und T'.

In diesem und den beiden folgenden Abschnitten werden in der auptsache solche Eigenschaften der Flächen zur Darstellung gelangen, elche gegenüber allgemeinen affinen Transformationen invariant sind. s sind damit die allgemeinen linearen Transformationen nach Lies Bezeichnungsweise gemeint. Nur ausnahmsweise wird die engere Gruppe der haltstreuen affinen Transformationen in Frage kommen.

Eine Fläche S möge in bezug auf ihre Asymptotenlinien durch die eichungen

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

rgestellt sein. Es seien ferner E, F, G, L, M, N die Fundamentalgrößen r gewöhnlichen Flächentheorie; auch sollen die benutzten Dreiindizesmbole auf die erste Fundamentalform derselben bezogen sein. Die in r Affingeometrie üblichen Größen bezeichne ich mit L', M', N', so daß

$$L' = DL = 0, \qquad M' = DM, \qquad N' = DN = 0$$

und die Grundformen der Affingeometrie sich auf

$$2\varphi\, du\, dv, \qquad P du^3 + Q dv^3$$

duzieren. Um im folgenden reelle Gebilde zu erhalten, nehme ich im gemeinen an, daß die betrachtete Fläche reell und das betrachtete

Flächenstück negativ gekrümmt sei, und wähle daher

$$\varphi = \sqrt{(x_u, x_v, x_{uv})} = \sqrt{M'} = \sqrt{DM}; \tag{2}$$

dann wird

$$P = \varphi \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad Q = \varphi \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \varphi_u = \varphi \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad \varphi_v = \varphi \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}, \tag{3}$$

$$\sigma = \frac{PQ}{\varphi^3}, \quad \psi = -\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v}.$$

Ferner setze ich

$$A^2 = \sum x_{uv}^2 = M^2 + E\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}^2 + 2F\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} + G\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}^2,$$

$$B = \frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} - FK = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} - FK, \tag{4}$$

$$= \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = -\varphi(\psi - \sigma).$$

Die abwickelbaren Flächen sind von der Betrachtung ausgeschlossen; es wird also angenommen, daß das Gaußsche Krümmungsmaß $K \neq 0$ und damit $M \neq 0$ ist. Damit sollen auch Stellen der Fläche, in denen $K = 0$ ist, d. h. die Punkte der parabolischen Kurve ausgeschlossen sein. Dann muß bei reellen Flächen, wie aus (4) hervorgeht, auch $A \neq 0$ sein.

Die Asymptotenlinien können nun dadurch gekennzeichnet werden, daß ihre Schmiegungsebene mit der Tangentialebene der Fläche zusammenfällt oder, was dasselbe ist, daß drei benachbarte Punkte P, P_1, P_2 der Kurve der Tangentialebene des Ausgangspunktes angehören. Das ist aber eine Eigenschaft, welche bei projektiven Transformationen erhalten bleibt; daher gehen bei ihnen Asymptotenlinien in Asymptotenlinien über[1]). Ich lege nun durch einen Flächenpunkt P die Asymptotenlinie $u = \text{konst.}$ und ziehe von ihren Punkten aus die Tangenten $g, g_1, g_2, \ldots$ an die Asymptotenlinien $v = \text{konst.}$ Dann bestimmen dieselben eine Regelfläche T, welche mit S projektiv verknüpft ist. Entsprechend kann man eine Regelfläche T' definieren, indem man von den Punkten der Asymptotenlinie $v = \text{konst.}$ aus an die Asymptotenlinien $u = \text{konst.}$ die Tangenten $g', g_1', g_2', \ldots$ legt. Drei aufeinander folgende Erzeugende von T und T' bestimmen alsdann die oskulierenden F_2 dieser Regelflächen; und die beiden so dem Flächenpunkt P zugeordneten F_2 werden ebenfalls mit der Fläche S gegenüber projektiven Transformationen invariant verknüpft sein. An diesem Verhältnis wird auch durch einen Grenzübergang nicht geändert.

---

[1]) Einen analytischen Beweis hat z. B. Darboux gegeben, Leçons sur la théorie générale des surfaces I (1887), S. 127—145. Auch die konjugierten Systeme haben diese Eigenschaft.

Legt man aber durch g die Ebene, welche zu g_1 parallel ist, so wird die Beziehung zu den uneigentlichen Punkten des Raumes eingeführt. Daher wird diese Ebene, welche ich nach Ausführung eines Grenzüberganges als die erste Asymptotenebene e des Punktes P bezeichnen will, nur bei solchen projektiven Transformationen invariant bleiben, welche die uneigentliche Ebene als Ganzes invariant lassen. Das aber sind die affinen Transformationen.

Werden die Richtungskosinus der Geraden g mit α, β, γ bezeichnet, so ist

(5a) $$\alpha = \frac{x_u}{\sqrt{E}}$$

und für die Richtungskosinus von g_1 hat man

(6a) $$\alpha_1 = \alpha + \alpha_v \varepsilon + \alpha_{vv} \frac{\varepsilon^2}{2} + \ldots .$$

Geht man zur Grenze $\varepsilon = 0$ über, so erhält man für die Richtungskosinus der Normale der ersten Asymptotenebene die Werte [2])

(7a) $$l_1 = \mu \left(\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} X + X_u \right),$$

wo X, Y, Z die Richtungskosinus der Flächennormale sind. Entsprechend ergeben sich für die Richtungskosinus der Normale der zweiten Asymptotenebene e' die Darstellungen

(7b) $$l_2 = \nu \left(\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} X + X_v \right),$$

wobei

(8) $$\frac{1}{\mu^2} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}^2 - EK, \qquad \frac{1}{\nu^2} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}^2 - GK$$

ist. Die Asymptotenebenen e und e' haben die Gleichungen

(9a) $$\sum \left(\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} X + X_u \right) (\xi - x) = 0,$$

(9b) $$\sum \left(\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} X + X_v \right) (\xi - x) = 0;$$

ist ω der Winkel, welchen sie miteinander bilden, so ergibt sich

(10) $$\cos \omega = \mu\nu \left(\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + FK \right), \qquad \sin \omega = \mu\nu \frac{M}{D} A .$$

Sind l, m, n die Richtungskosinus der Schnittlinie a der beiden Asymptotenebenen, so findet man

(11) $$l = \frac{x_{uv}}{A}.$$

Diese Richtung, welche ihrer geometrischen Entstehung nach mit dem

[2]) P. Franck, Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung 23 (1914), S. 343–352.

Flächenpunkt affin verknüpft ist, wird bekanntlich als die Affinnormale des Flächenpunktes P bezeichnet.

Da die Asymptotenebene e die uneigentlichen Punkte der Geraden g und g_1 enthält, so kann sie auch als asymptotische Tangentialebene der Regelfläche T definiert werden. Letztere hat in den Parametern h, v die Gleichungen

$$x_1 = x + h x_u \tag{12}$$

und es ist

$$\sum X(\xi - x) + \frac{h}{\mu} \sum l_1 (\xi - x) = 0$$

die Gleichung ihrer Tangentialebene im Punkte h, v. Daraus ergibt sich für die asymptotische Tangentialebene die Gleichung (9a). Der Begriff der Asymptotenebene einer Regelfläche in beiderlei Sinn und auch der Name kommt bei Schell[3]) vor; doch werden die asymptotischen Tangentialebenen bei der Untersuchung algebraischer Flächen schon weit früher benutzt. Die Definition der Geraden a als Schnittlinie der Asymptotenebenen, wobei dieselben in der zweiten Weise erklärt werden, findet sich bereits bei Demoulin[4]). In bewußter Anwendung auf die Affinnormale hat Herr Blaschke[5]) die hier benutzte Definition gegeben, wobei er sich der ersten Erklärung der betreffenden Ebenen bedient.

Setzt man zur Abkürzung

$$C^2 = 1 + 2\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} h + \left(\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}^2 - EK \right) h^2, \tag{13}$$

so erhält man für die Fundamentalgrößen der Regelfläche T die Werte

$$\begin{gathered} E_1 = E, \qquad F_1 = F + \frac{1}{2} E_v h, \qquad G_1 = G + G_u h + A^2 h^2, \\ L_1 = 0, \qquad M_1 = \frac{M}{C}, \qquad N_1 = -\frac{MBh^2}{C}. \end{gathered} \tag{13}$$

Da dieselben für $h = 0$ mit denen der Fläche S übereinstimmen, so oskuliert T die Fläche S längs der Asymptotenlinie $u = \text{konst}$. Für die krummen Asymptotenlinien der Regelfläche ergibt sich aus (13) die Differentialgleichung

$$2dh - Bh^2 dv = 0,$$

mit deren Hilfe man die Richtungskosinus der Tangenten $\bar{g}'$ und $\bar{g}_1'$ zweier benachbarter dieser Asymptotenlinien berechnen kann. Nimmt man dabei

---

[3]) Schell, Theorie der Kurven doppelter Krümmung, 2. Auflage, 1898, S. 100. Wahrscheinlich auch in der 1. Auflage.

[4]) Demoulin, C. R. 147 (1908), S. 493–496.

[5]) W. Blaschke, Zur Affingeometrie XXV. Raumkurven und Schiebflächen. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 71 (1919), S. 20–28.

h hinreichend klein an, so daß man nach Potenzen von h entwickeln kann, und vergleicht die erhaltenen Darstellungen mit den Formeln

(5b) $$\alpha' = \frac{x_v}{\sqrt{G}},$$

(6b) $$\alpha_1' = \alpha' + \alpha_u' \varepsilon' + \alpha_{uu}' \frac{\varepsilon'^2}{2} + \ldots,$$

welche für die Tangenten g' und g_1' der Asymptotenlinien $u =$ konst. der gegebenen Fläche gelten, so zeigt sich, daß die Koeffizienten bis zu denen der ersten Potenzen von h und ε' übereinstimmen, während das von den folgenden nicht mehr gilt. Aus dieser Übereinstimmung ergibt sich der Schluß, daß im Punkte P auch die zweite Asymptotenebene der Regelfläche T mit der zweiten Asymptotenebene der Fläche S zusammenfällt. Daraus erhält man dann weiter den Satz:

Satz 1. *Die Regelflächen T und T', welche die Fläche S im Punkte P oskulieren, haben mit ihr an dieser Stelle beide Asymptotenebenen und die Affinnormale gemein.*

§ 2.

Die Liesche F_2. Beweis des Lieschen Satzes für den Fall der F_2 mit Mittelpunkt.

Die asymptotischen Tangentialebenen der Regelfläche T in den uneigentlichen Punkten von g und g_1 sind zugleich asymptotische Tangentialebenen der oskulierenden F_2, gehen also durch den Mittelpunkt derselben. Daher geht auch die Schnittlinie c zweier konsekutiver Asymptotenebenen e und e_1 der Schar (9a) durch den Mittelpunkt. Diese Gerade c, welche eine Seitenlinie des Asymptotenkegels der F_2 ist, nenne ich mit Demoulin die Charakteristik der Asymptotenebene e; man erkennt leicht auf geometrischem Wege, daß sie zu g parallel ist. Auch diese Figur mit Einschluß der Geraden c ist ihrer geometrischen Entstehung nach mit der Fläche S affin verknüpft.

Um die Charakteristik zu bestimmen, ist die Gleichung (9a) nach v zu differenzieren. Unter Benutzung der Formeln für das sphärische Bild der Fläche S und einer der Darstellungsformen (4) der Größe B kann die dadurch erhaltene Gleichung auf die Form

(15) $$B \sum X(\xi - x) - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \sum' \left(\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} X + X_u \right)(\xi - x) + M = 0$$

gebracht werden. Ist $B = 0$, so stellt diese Gleichung eine zu (9a) parallele Ebene dar, so daß in diesem Fall die Schnittlinie zweier benachbarten Asymptotenebenen (9a) eine uneigentliche Gerade ist. Soll die

F_2 einen eigentlichen Mittelpunkt besitzen, so muß also

$$B \neq 0 \tag{16}$$

sein. Dann ergibt sich aus (9a) und (15)

$$B \sum X(\xi - x) + M = 0. \tag{17}$$

Da diese Gleichung eine zur Tangentialebene der Fläche S parallele Ebene definiert, so ist c parallel zu g. Entsprechend findet man, daß die Charakteristik c' der Asymptotenebene e' durch (9b) und dieselbe Gleichung (17) dargestellt wird, so daß c' zu g' parallel ist.

Mit Hilfe des Satzes 1 erkennt man nun, daß die Mittelpunkte der beiden oskulierenden F_2 auch auf der Affinnormalen a liegen müssen. Daher haben die F_2 als gemeinsamen Mittelpunkt C den Schnittpunkt der Affinnormale mit der Ebene (17). Daraus erhält man für die Koordinaten des Punktes C die Formeln

$$x_0 = x - \frac{x_{uv}}{B} = x + rl, \tag{18}$$

wobei

$$r = -\frac{A}{B} \tag{19}$$

der Abstand PC ist. Dieses Resultat kann man auch aus gewissen von Herrn Radon[9]) angegebenen Formeln ableiten. Danach hat der Mittelpunkt der oskulierenden F_2 der Regelfläche

$$x_1 = \mathfrak{l}(v) + h\mathfrak{a}(v)$$

die Koordinaten

$$x_0 = \mathfrak{l} - \frac{q}{p}\mathfrak{a} + \frac{f}{p}\mathfrak{a}'.$$

Für die Regelfläche (12) wird

$$\mathfrak{l}(v) = x, \qquad \mathfrak{a}(v) = x_u,$$

$$f(v) = -\sqrt{DM}, \qquad p(v) = B\sqrt{DM}, \qquad q(v) = 0,$$

und daraus ergeben sich wieder die Werte (18).

Da die Affinnormale durch den Mittelpunkt der F_2 geht, so bestimmt sie einen Durchmesser $PC\bar{P}$ derselben, so daß

$$\bar{x} = x - 2rl = x - 2\frac{x_{uv}}{B}$$

die Koordinaten des Punktes $\bar{P}$ sind. Die Asymptotenebenen e und e' schneiden dabei die F_2 in den geradlinigen Erzeugenden g und g' und in zwei zu ihnen parallelen Erzeugenden h und h' durch den Punkt $\bar{P}$,

[9]) J. Radon, Über affine Geometrie XVII. Zur Affingeometrie der Regelflächen. Ber. Ges. Lpz. (math.-phys.) 71 (1919), S. 20–28.

welche die Tangentialebene der F_2 in $\bar{P}$ bestimmen. Letztere ist zur Tangentialebene in P parallel und hat daher die Gleichung

$$B\sum X(\xi - x) + 2M = 0. \tag{20}$$

Damit sind zwei Ebenenpaare bekannt, welche g, g', h und h' enthalten, nämlich einerseits die Tangentialebenen in P und $\bar{P}$ und andererseits die Asymptotenebenen (9a) und (9b). Das Büschel von Flächen zweiten Grades durch diese vier Geraden hat also die Gleichung

$$\left[B\sum X(\xi - x) + 2M\right]\sum X(\xi - x) - \lambda\sum\left(\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}X + X_u\right)(\xi - x)\sum\left(\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}X + X_v\right)(\xi - x) = 0. \tag{21}$$

Unter diesen F_2, welche übrigens den gemeinschaftlichen Mittelpunkt C besitzen, befinden sich die dem Punkt P zugeordneten oskulierenden F_2 der Regelflächen T und T'. Die erste derselben kann dadurch gekennzeichnet werden, daß sie außer den vier Geraden, welche das Büschel definieren, auch noch g_1 enthält, d. h. (21) muß durch

$$\xi = x + x_v\varepsilon + \ldots + t(x_u + x_{uv}\varepsilon + \ldots)$$

beim Übergang zur Grenze $\varepsilon = 0$ für alle Werte von t befriedigt werden. Dadurch ergibt sich $\lambda = 2$; auf dasselbe Resultat führt die Forderung, daß g_1' auf der F_2 liegt. Damit ist der Liessche Satz für den Fall der Mittelpunktsflächen bewiesen; er kann unter Benutzung der eingeführten Bezeichnungen in der Form ausgesprochen werden:

Satz 2. *Die beiden F_2, welche die Regelflächen T und T' längs g bzgl. g' oskulieren, fallen zusammen.*

Zugleich hat sich eine neue Ableitung der Gleichung der Lieschen F_2 eines Flächenpunktes ergeben. Es ist die Gl. (21) für $\lambda = 2$, welche in der Tat mit der von mir früher auf andere Weise[7]) abgeleiteten Gleichung identisch ist. Verlegt man den Ursprung des Koordinatensystems in den Mittelpunkt C der F_2, so geht diese Gleichung über in

$$B\left(\sum X\xi' + \frac{M}{B}\right)\left(\sum X\xi' - \frac{M}{B}\right) - 2\sum\left(\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}X + X_u\right)\xi'\sum\left(\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}X + X_v\right)\xi' = 0 \tag{22}$$

[7]) P. Franck, Über die Liesche F_2 eines Flächenpunktes. Sitzungsberichte der Berl. Math. Ges., XIII. Jahrgang (1914), S. 110–127. Zur Diskussion der Gleichung der Lieschen F_2 eines Flächenpunktes. Mitt. der Hamb. Math. Ges., 1914, S. 113–129.

oder in anderer Form

$$(23)\quad \varphi(\xi', \eta', \zeta') = a_{11}\xi'^2 + a_{22}\eta'^2 + a_{33}\zeta'^2 + 2a_{23}\eta'\xi' + 2a_{31}\zeta'\xi' + 2a_{12}\xi'\eta' = \frac{M^2}{B},$$

wo die Koeffizienten die Werte

$$(24)\quad \begin{aligned} a_{11} &= BX^2 - 2\left(\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}X + X_u\right)\left(\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}X + X_v\right), \\ a_{23} &= BYZ - \left(\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}Y + Y_u\right)\left(\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}Z + Z_v\right) \\ &\quad - \left(\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}Z + Z_u\right)\left(\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}Y + Y_v\right) \end{aligned}$$

besitzen[7]).

Da die Affinnormale mit dem Durchmesser zusammenfällt, welcher die Berührungspunkte P und $\overline{P}$ zweier zueinander paralleler Tangentialebenen der F_2 miteinander verbindet, so erhält man weiter:

Satz 3. *Die Affinnormale eines Flächenpunktes ist die in bezug auf die Liesche F_2 dieses Punktes zu seiner Tangentialebene konjugierte Richtung.*

Damit hat sich eine neue Definition der Affinnormale ergeben, und zwar eine solche, welche sowohl für positiv als auch für negativ gekrümmte Flächen brauchbar ist, während die Definition, welche sich der Asymptotenebenen bedient, nur bei negativ gekrümmten Flächen eine reelle Bedeutung hat.

Führt man das Dreikant a, c, c' als neues Koordinatensystem ein, indem man

$$\xi' = \alpha\xi'' + \alpha'\eta'' + l\zeta''$$

setzt, so ergibt sich aus (23)

$$(25)\quad \frac{B}{A^2}\zeta''^2 - \frac{2\xi''\eta''}{\sqrt{EG}} = \frac{1}{B}$$

als Gleichung der Lieschen F_2. Man kann auch ein System von konjugierten Richtungen einführen, indem man die Charakteristiken c und c' durch ihre Winkelhalbierenden ersetzt. Die Richtungskosinus der letzteren sind durch

$$\bar{\alpha} = \frac{\sqrt{G}x_u - \sqrt{E}x_v}{\sqrt{2}\sqrt{EG - F\sqrt{EG}}}, \qquad \bar{\alpha}' = \frac{\sqrt{G}x_u - \sqrt{E}x_v}{\sqrt{2}\sqrt{EG + F\sqrt{EG}}}$$

gegeben; in diesem neuen System erhält die Gleichung der Lieschen F_2 die Form

$$(26)\quad \frac{\xi''^2}{\sqrt{EG} - F} - \frac{\eta''^2}{\sqrt{EG} + F} + \frac{B}{A^2}\zeta''^2 = \frac{1}{B}$$

Legt man durch die Charakteristiken eine Diametralebene der F_2, so sind

diese Geraden die Asymptoten der entstehenden Schnittlinie. Da die Charakteristiken andererseits zu den Asymptotenrichtungen des Flächenpunktes parallel sind, so werden die Hauptachsen der Schnittkurve zu den Hauptkrümmungsrichtungen des Punktes P parallel sein. Da parallele Ebenen die F_2 in ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten schneiden, so erhält man den

Satz 4. *Eine zur Tangentialebene eines Flächenpunktes parallele Ebene schneidet dessen Liesche F_2 in einer C_2, deren Asymptoten den Asymptotenrichtungen und deren Hauptachsen den Hauptkrümmungsrichtungen des Flächenpunktes parallel sind.*

Aus (26) kann man die Längen a', b', c' dreier konjugierter Radien der F_2 entnehmen und erhält dann

$$V = a'\,b'\,c'\,\Delta = \frac{DM}{B^2},$$

wo V das Volumen des Parallelflächners mit den Kanten a', b', c' und Δ der zugehörige v. Staudtsche Eckensinus ist. Nach einem bekannten Satz über die konjugierten Durchmesser der Flächen zweiten Grades ist dieses Volumen gleich dem Produkt der Halbachsen a, b, c der F_2 und

$$p = -\frac{M}{B}$$

ist der Abstand ihres Mittelpunktes von der Tangentialebene des Punktes P. Daher erhält man für die mittlere Affinkrümmung die Darstellungen

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right) = \psi - \sigma = -\frac{B}{\sqrt{DM}} = -\frac{1}{\sqrt{abc}} = \frac{\sqrt[4]{|K|}}{p} \tag{27}$$

Die Beziehung der mittleren Affinkrümmung zu diesem auf die Liesche F_2 bezüglichen Volumen ist zuerst von Herrn Radon im Falle der Regelflächen bemerkt und von Herrn Berwald[8]) auf beliebige Flächen ausgedehnt worden. Dagegen wurde die letztere Darstellung bisher noch nicht hervorgehoben.

§ 3.

Die Begleiter der Affinnormale.

Für den Lieschen Satz hat Herr Engel einen besonders kurzen allgemeinen Beweis gegeben, der nebst weiteren Untersuchungen mit seiner freundlichen Genehmigung im Anschluß an diese Arbeit zum Abdruck gelangt. Dabei tritt zugleich deutlich hervor, daß die Liesche F_2 mit der Fläche S projektiv verknüpft ist. Allgemein affingeometrisch sind z. B. die Asymptotenebenen, die Affinnormale, die Fläche der Mittelpunkte der

[8]) L. Berwald, Über Affingeometrie XXVII. Liesche F_2, Affinnormale und mittlere Affinkrümmung. Math. Zeitschrift 8 (1920), S. 63–78.

Lieschen F_2, die in dem Strahlensystem der Affinnormalen enthaltenen abwickelbaren Flächen, die Affinkrümmungslinien und die Affinzentraflächen, wobei der affine Krümmungsradius freilich anders zu definieren ist, als es gewöhnlich geschieht. Es ergibt sich damit eine Reihe weiterer Fragestellungen, von denen ich hier einige behandeln will.

Die ersten Asymptotenebenen längs einer Asymptotenlinie $v =$ konst. umhüllen eine abwickelbare Fläche, und zwei benachbarte Ebenen dieser Schar schneiden sich in einer Geraden a_1 derselben. Um die Richtung dieser Geraden zu bestimmen, hat man die Gleichung (9a) nach u zu differenzieren. Die erste Fundamentalgleichung der Flächentheorie kann nun unter Benutzung der Formeln (3)

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} + EK = \frac{1}{\varphi}\left(P_v - P\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right) + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\left(\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right)$$

geschrieben werden. Mit Hilfe dieser Beziehung und der Formeln für das sphärische Bild der Fläche S erhält man durch die angegebene Differentiation

$$\sum\left[\left(P_v - P\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right)X - PX_v\right](\xi - x) = 0, \tag{28a}$$

wobei das Ergebnis zugleich mit Rücksicht darauf vereinfacht worden ist, daß für die gesuchte Schnittlinie ja auch die Gleichung (9a) gilt. Aus (9a) und (28a) erhält man für die Richtungkosinus λ_1, μ_1, ν_1 von a_1 die Werte

$$\lambda_1 = \frac{1}{C_1}(Px_{uv} - P_v x_u), \tag{29a}$$

und für die entsprechende den Asymptotenlinien $u =$ konst. zugeordnete Gerade a_2 ergibt sich

$$\lambda_2 = \frac{1}{C_2}(Qx_{uv} - Q_u x_v). \tag{29b}$$

Dabei ist

$$C_1^2 = A^2P^2 - E_vPP_v + EP_v^2, \quad C_2^2 = A^2Q^2 - G_uQQ_u + GQ_u^2 \tag{30}$$

gesetzt worden. Diese Geraden a_1 und a_2, welche wie die Asymptotenebenen nur bei negativ gekrümmten Flächen reell sind, bezeichne ich als die *Begleiter der Affinnormale*.

Fragt man nun, wann einer der Begleiter mit der Affinnormale zusammenfällt, so ist zunächst zu bemerken, daß nach (29) und (30) die Richtung von a_1 unbestimmt wird, wenn $P \equiv 0$ ist, und die von a_2, wenn $Q \equiv 0$ ist. Im ersten Falle ist die Fläche eine Regelfläche mit den Erzeugenden $v =$ konst., während im zweiten Falle die Kurven $u =$ konst. diese Rolle spielen. Geometrisch ergibt sich diese Unbestimmtheit daraus, daß sich auf einer Regelfläche längs einer Erzeugenden die Asymptotenebene nicht ändert.

Unter der Annahme $P \neq 0$ erhält man für das Zusammenfallen des ersten Begleiters mit der Affinnormale die Bedingungen

(31) $$(AP - C_1)\, x_{uv} - AP_v x_u = 0;$$

das sind drei lineare homogene Gleichungen für die beiden Größen $AP - C_1$ und AP_v. Unter ihnen müssen wenigstens zwei mit nicht verschwindender Determinante vorhanden sein, da sonst die Affinnormale mit der Tangente g an die Asymptotenlinie $v = \text{konst.}$ zusammenfallen würde; das aber ist ausgeschlossen, da sich sonst gegen die Voraussetzung $M = 0$ ergeben würde. Daher müssen die vorher erwähnten Größen verschwinden; da auch $A \neq 0$ ist, so erhält man zunächst

(32 a) $$P_v = 0,$$

womit die erste Größe gleichzeitig verschwindet. Unter der Annahme $Q \neq 0$ ergibt sich für das Zusammenfallen des Begleiters a_2 mit der Affinnormale die entsprechende Bedingung

(32 b) $$Q_u = 0.$$

Die Forderung, daß beide Begleiter mit der Affinnormale zusammenfallen, führt also auf den

Satz 5. *Nur auf den Affinsphären, welche keine Regelflächen sind, fallen beide Begleiter mit der Affinnormale zusammen.*

Diese Fragestellung führt auf zwei weitere, welche allerdings keinen affingeometrischen Charakter besitzen. Soll die Affinnormale mit der Flächennormale zusammenfallen, so muß

$$x_{uv} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} x_u + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} x_v + MX = AX$$

sein. Das sind drei lineare homogene Gleichungen mit nichtverschwindender Determinante, aus denen sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen

(33) $$\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\varrho_v}{2\varrho} = 0, \qquad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{\varrho_u}{2\varrho} = 0$$

ergeben. Daraus folgt

$$K = -\frac{1}{\varrho^2} = \text{konst.}$$

Daher gilt der

Satz 6. *Die Flächen konstanter von Null verschiedener Krümmung sind die einzigen, bei denen die Affinnormale mit der Flächennormale zusammenfällt*[9]).

[9]) Wie ich während der Korrektur bemerke, hat Fubini eine projektive Definition der Flächen konstanter Krümmung gegeben, welche zu der obigen in Beziehung steht. G. Fubini, Fondamenti della geometria proiettivo-differenziali di una superficie. Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino 53 (1917—1918). S. 1032—1043.

Für das Zusammenfallen des Begleiters a_1 mit der Flächennormale erhält man die notwendigen und hinreichenden Bedingungen

$$P\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} - P_v = 0, \qquad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = 0. \tag{34}$$

Aus der zweiten derselben folgt

$$\varrho = \frac{D}{M} = V_{(v)}^2, \qquad \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \frac{V'}{V}, \qquad \varphi = \sqrt{DM} = MV.$$

Darauf kann man aus der ersten Gleichung (34) die Größe P bestimmen und erhält ferner unter Benutzung der Codazzischen Gleichungen

$$\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} = \frac{M_u}{M}, \quad \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = \frac{U}{M}, \quad \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \frac{V'}{V}, \quad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = 0, \quad \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = \frac{M_v}{M} + \frac{V'}{V} \tag{35}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die erste Fundamentalgleichung ein, so findet man $EK = 0$. Das aber ist ausgeschlossen; *es gibt also keine Flächen auf denen einer der Begleiter mit der Flächennormale zusammenfällt.*

Ich will nun noch an einer Reihe von Beispielen zeigen, daß es unter den Affinminimalflächen solche gibt, auf denen alle Begleiter der einer Schar oder auch die Begleiter jeder Schar zueinander parallel sind. Das ist eine triviale Bemerkung für die uneigentlichen Affinsphären, bei denen ja die Begleiter mit den zueinander parallelen Affinnormalen zusammenfallen. Aber es kommt auch vor, daß die Begleiter zueinander parallel sind, ohne daß die Affinnormalen diese Eigenschaft besitzen. Dieser Fall liegt bei den geraden Konoiden vor, bei denen die den krummen Asymptotenlinien entsprechenden Begleiter zueinander parallel sind. Es folgt das daraus, daß bei ihnen die diesen Asymptotenlinien zugeordneten Asymptotenebenen auf der Richtebene senkrecht stehen. Bei der Enneperschen Minimalfläche

$$x = \frac{1}{4}(u+v)(u^2 - 4uv + v^2 + 6), \; y = -\frac{1}{4}(u-v)(u^2 + 4uv + v^2 + 6), \; z = 3u$$

ergibt die Rechnung

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \mu_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \nu_1 = 0, \qquad \lambda_2 = \mu_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \nu_2 = 0.$$

Die Begleiter liegen also senkrecht zur Z-Achse, ohne diese im allgemeinen zu schneiden, und sind parallel zu je einer der Ebenen, welche die Winkel der XZ- und der YZ-Ebene halbieren. Auf die allgemeinen Bedingungen für die parallele Lage der Begleiter beabsichtige ich zurückzukommen.

Es sei noch hervorgehoben, daß bei den geraden Konoiden die den krummen Asymptotenlinien zugeordneten Begleiter auf der Affinnormalen senkrecht stehen. Aus (29) erhält man für diese Lagenbeziehung die Bedingungen

$$A^2 P - \frac{1}{2} E_v P_v = 0, \qquad A^2 Q - \frac{1}{2} G_u Q_u = 0. \tag{36}$$

Dahingegen kann es, wie man leicht erkennt, nicht vorkommen, daß einer der Begleiter auf der Flächennormale senkrecht steht.

Untersuchungen von Herrn F. Engel über die Liesche F_2.

Unter Benutzung homogener Koordinaten sei die Fläche in den Parametern der Haupttangentenkurven durch die homogenen Gleichungen

$$x_1 = x_1(u, v), \ldots, x_4 = x_4(u v)$$

dargestellt. Dann ist für jedes x

$$\begin{aligned} x_{uu} &= \alpha_1 x + \alpha_2 x_u + \alpha_3 x_v, \\ x_{vv} &= \beta_1 x + \beta_2 x_u + \beta_3 x_v, \end{aligned} \tag{1}$$

also

$$\begin{aligned} (x\, x_u\, x_v\, x_{uu}) &= 0, \\ (x\, x_u\, x_v\, x_{vv}) &= 0. \end{aligned} \tag{1'}$$

Aus (1) folgt

$$x_{uuv} = \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial v} + \alpha_3 \beta_1\right) x + \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial v} + \alpha_3 \beta_2\right) x_u + \left(\alpha_1 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial v} + \alpha_3 \beta_3\right) x_v + \alpha_2 x_{uv},$$

$$x_{uvv} = \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial u} + \beta_2 \alpha_1\right) x + \left(\beta_1 + \frac{\partial \beta_2}{\partial u} + \alpha_2 \beta_2\right) x_u + \left(\frac{\partial \beta_3}{\partial u} + \beta_2 \alpha_3\right) x_v + \beta_3 x_{uv}.$$

Bildet man

$$\frac{\partial}{\partial v} x_{uuv} = \frac{\partial}{\partial u} x_{uvv},$$

so ergibt die Vergleichung der Koeffizienten von x_{uv}

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial v} = \frac{\partial \beta_3}{\partial u}. \tag{2}$$

Nun definiert

$$(\xi\, \eta\, x\, x_u) = 0$$

alle Geraden ξ, η, welche die durch den Punkt u, v gehende Tangente der Kurve $v =$ konst. schneiden. Durch Differentiation nach v findet man die Gleichungen

$$\begin{aligned} &(\xi\, \eta\, x\, x_u) = 0, \\ &(\xi\, \eta\, x\, x_{uv}) - (\xi\, \eta\, x_u\, x_v) = 0, \\ &(\xi\, \eta\, x\, x_{uvv}) + 2(\xi\, \eta\, x_v\, x_{uv}) - (\xi\, \eta\, x_u\, x_{vv}) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

zur Bestimmung aller Geraden ξ, η, welche die Tangenten an die durch drei aufeinanderfolgende Punkte einer Kurve $u =$ konst. gehenden Kurven $v =$ konst. schneiden. Ebenso sind

$$\begin{aligned} &(\xi\, \eta\, x\, x_v) = 0, \\ &(\xi\, \eta\, x\, x_{uv}) + (\xi\, \eta\, x_u\, x_v) = 0, \\ &(\xi\, \eta\, x\, x_{uuv}) + 2(\xi\, \eta\, x_u\, x_{uv}) - (\xi\, \eta\, x_v\, x_{uu}) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

die Gleichungen der Gerade, welche drei aufeinanderfolgende Tangenten an drei Kurven $u = \text{konst.}$ schneiden.

Zu beweisen ist, daß jede Gerade, die (3) erfüllt, von jeder Geraden, die (4) erfüllt, geschnitten wird, oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß die Gerade x, x_v und die beiden darauffolgenden Geraden

$$x + x_u du + \frac{1}{2} x_{uu} du^2, \qquad x_v + x_{uv} du + \frac{1}{2} x_{uuv} du^2$$

die Gleichung (3) befriedigen. Es müssen also die neun Gleichungen erfüllt sein, die man erhält, wenn man zu den Gleichungen (3) die sechs Gleichungen hinzufügt, die durch zweimalige Differentiation nach u hervorgehen, wenn man bloß ξ, η als veränderlich betrachtet und dabei

$$\xi = x, \qquad \eta = x_v$$

setzt. Von diesen Gleichungen sind die drei ersten

$$\begin{aligned} &(x\, x_v\, x\, x_u) = 0, \\ &(x\, x_v\, x\, x_{uv}) - (x\, x_v\, x_u\, x_v) = 0, \\ &(x\, x_v\, x\, x_{uvv}) + 2(x\, x_v\, x_v\, x_{uv}) - (x\, x_v\, x_u\, x_{vv}) = 0 \end{aligned}$$

unter Beachtung von (1′) ohne weiteres identisch erfüllt. Die nächsten fünf sind ohne weiteres identisch erfüllt oder erweisen sich als identisch, wenn man die Ausdrücke für x_{uu}, x_{vv}, x_{uuv}, x_{uvv} einsetzt. Die letzte lautet zunächst

$$\begin{aligned} &(x\, x_{uuv}\, x\, x_{uvv}) + 2(x_u\, x_{uv}\, x\, x_{uvv}) + (x_{uu}\, x_v\, x\, x_{uvv}) + 2(x\, x_{uuv}\, x_v\, x_{uv}) \\ &\quad + 2(x_u\, x_{uv}\, x_v\, x_{uv}) + 2(x_u\, x_{uv}\, x_v\, x_{uv}) + 2(x_{uu}\, x_v\, x_v\, x_{uv}) \\ &\quad - (x\, x_{uuv}\, x_u\, x_{vv}) - (x_u\, x_{uv}\, x_u\, x_{vv}) - (x_u\, x_{uv}\, x_u\, x_{vv}) \\ &\quad - (x_{uu}\, x_v\, x_u\, x_{vv}) = 0 \end{aligned}$$

und reduziert sich auf

$$\begin{aligned} &2(x\, x_u\, x_{uv}\, x_{uvv}) - (x\, x_v\, x_{uu}\, x_{uvv}) + 2(x\, x_v\, x_{uv}\, x_{uuv}) \\ &\quad - (x\, x_u\, x_{vv}\, x_{uuv}) + (x_u\, x_v\, x_{uu}\, x_{vv}) = 0. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Werte von x_{uu}, x_{vv}, x_{uuv}, x_{uvv} ergibt sich

$$(x\, x_u\, x_{uv}\, x_{uvv}) = -\left(\frac{\partial \beta_3}{\partial u} + \beta_2 \alpha_3\right) \Delta, \qquad (x\, x_v\, x_{uu}\, x_{uvv}) = -\alpha_2 \beta_3 \Delta,$$

$$(x\, x_v\, x_{uv}\, x_{uuv}) = \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial u} + \alpha_3 \beta_2\right) \Delta, \qquad (x\, x_u\, x_{vv}\, x_{uuv}) = \alpha_2 \beta_3 \Delta,$$

$$\Delta = (x\, x_u\, x_v\, x_{uv}).$$

Infolge von (2) ist also auch die letzte jener neun Gleichungen erfüllt, womit der Liesche Satz bewiesen ist.

Die Gleichungen (3) und (4) bestimmen also die beiden Scharen der Erzeugenden einer F_2. Um diese Fläche selbst darzustellen, wähle ich

in (3) den Punkt η beliebig auf der Tangente x, x_u, also

$$\eta = \lambda x + \mu x_u ;$$

das ergibt

$$\mu(\xi x_u x x_{uv}) - \lambda(\xi x x_u x_v) = 0 ,$$

$$\mu(\xi x_u x x_{uvv}) + 2\lambda(\xi x x_v x_{uv}) + 2\mu(\xi x_u x_v x_{uv}) - \lambda(\xi x x_u x_{vv}) = 0$$

oder

$$\lambda(\xi x x_u x_v) + \mu(\xi x x_u x_{uv}) = 0 ,$$

$$\mu\left[-\left(\frac{\partial \beta_3}{\partial u} + \beta_2 \alpha_3\right)(\xi x x_u x_v) - \beta_3(\xi x x_u x_{uv})\right] + 2\lambda(\xi x x_v x_{uv})$$

$$+ 2\mu(\xi x_u x_v x_{uv}) - \lambda\beta_3(\xi x x_u x_v) = 0 .$$

Setzen wir

$$\xi = \alpha x + \beta x_u + \gamma x_v + \delta x_{uv} ,$$

so wird

$$\lambda\delta - \mu\gamma = 0 ,$$

$$\mu\left(\frac{\partial \beta_3}{\partial u} + \beta_2 \alpha_3\right)\delta - \mu\beta_3\gamma - 2\lambda\beta + 2\mu\alpha + \lambda\beta_3\delta = 0 ,$$

oder

$$\gamma = \varrho\lambda , \qquad \delta = \varrho\mu ,$$

$$2\alpha + \left(\frac{\partial \beta_3}{\partial u} + \beta_2 \alpha_3\right)\delta = 2\sigma\lambda , \qquad 2\beta = 2\sigma\mu .$$

Daraus folgt

$$\xi = \left[\sigma\lambda - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \beta_3}{\partial u} + \beta_2 \alpha_3\right)\varrho\mu\right] x + \sigma\mu x_u + \varrho\lambda x_v + \varrho\mu x_{uv} . \tag{5}$$

Das ist eine Parameterdarstellung der F_2 in den Parametern λ, μ und ϱ, σ der Erzeugenden. Setzt man

$$\frac{\mu}{\lambda} = \mathfrak{u} , \qquad \frac{\varrho}{\sigma} = \mathfrak{v} ,$$

so wird die F_2 in nichthomogenen Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ durch die Gleichungen

$$\mathfrak{x} = x + \frac{\mathfrak{u} x_u + \mathfrak{v} x_v + \mathfrak{u}\mathfrak{v} x_{uv}}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \beta_3}{\partial u} + \beta_2 \alpha_3\right)\mathfrak{u}\mathfrak{v}} \tag{6}$$

dargestellt, wobei $x_4 = 1$, $\frac{x_1}{x_4} = x$ usw. gesetzt worden ist.

Man kann aber auch die F_2 durch ihre gewöhnliche Gleichung in Punktkoordinaten darstellen. Es seien x_i und y_i $(i = 1, 2, 3)$ für jedes i zwei Punkte mit den homogenen Koordinaten $x_{i1} \dots x_{i4}$, $y_{i1} \dots y_{i4}$. Die drei Geraden $x_i y_i$ bestimmen eine F_2, die alle Geraden $\xi\eta$ enthält, welche den drei Gleichungen

$$(x_i y_i \xi\eta) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

genügen. Der Punkt η erscheint hier als Schnitt der drei Ebenen ξ, x_i, y_i

($i = 1, 2, 3$). Den Schnitt dieser drei Ebenen kann man aber durch die Gleichung

$$\Sigma \pm (x_1 y_1 \xi \mathfrak{x})(x_2 y_2 \xi \mathfrak{y})(x_3 y_3 \xi \mathfrak{z}) = 0$$

darstellen, wo $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ auf alle Arten zu permutieren sind und nach der bekannten Regel das Vorzeichen zu wählen ist[10]).

Ist nun $(x\,y\,z\,t)$ die Determinante aus den Koordinaten $x_i y_i z_i t_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) von vier Punkten, so ist

$$(x\,y\,z\,t)(\xi\,\eta\,\zeta\,\vartheta) = (x\,y\,z\,\xi)(t\,\eta\,\zeta\,\vartheta) + (x\,y\,z\,\eta)(\xi\,t\,\zeta\,\vartheta) + (x\,y\,z\,\zeta)(\xi\,\eta\,t\,\vartheta) + (x\,y\,z\,\vartheta)(\xi\,\eta\,\zeta\,t).$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann die vorhergehende auf die Form

$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,\xi)\{(x_1 y_1 x_2 \xi)(x_3 y_3 y_2 \xi) - (x_1 y_1 y_2 \xi)(x_3 y_3 x_2 \xi)\} = 0$$

gebracht werden, also ist der Schnitt der drei Ebenen im allgemeinen der Punkt ξ; nur wenn ξ auf der F_2

$$(7) \qquad (x_1 y_1 x_2 \xi)(x_3 y_3 y_2 \xi) - (x_1 y_1 y_2 \xi)(x_3 y_3 x_2 \xi) = 0$$

liegt, wird der Schnittpunkt unbestimmt, und der Schnitt der drei Ebenen ist eine Gerade. Also ist (7) die F_2 durch die drei Geraden $x_i y_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Wir setzen nun für x_2, y_2 die Punkte x, x_u und für die Geraden $x_1 y_1$, $x_3 y_3$ die darauffolgenden Geraden

$$x + x_v dv + x_{vv}\frac{dv^2}{2} \qquad x_u + x_{uv} dv + x_{uvv}\frac{dv^2}{2};$$

das gibt

$$(x_u x_v x\,\xi)[(x\,x_{uvv} x_u\,\xi) + 2(x_v x_{uv} x_u\,\xi)] + (x\,x_{uv} x_u\,\xi)[2(x_v x_{uv} x\,\xi) - (x_u x_{uv} x\,\xi)] = 0$$

als Gleichung der F_2. Diese Gleichung erhält endlich die Form

$$(x_u x_v x\,\xi)\left[\left(\frac{\partial \beta_3}{\partial u} + \beta_2 \alpha_3\right)(x\,x_v x_u\,\xi) + \beta_3(x\,x_{uv} x_u\,\xi) + 2(x_u x_v x_{uv}\,\xi)\right] - (x\,x_u x_{uv}\,\xi)[2(x\,x_v x_{uv}\,\xi) - \beta_3(x_u x_v x\,\xi)] = 0$$

oder

$$(8) \qquad -(x\,x_u x_v\,\xi)^2\left(\frac{\partial \beta_3}{\partial u} + \beta_2 \alpha_3\right) + 2(x\,x_u x_v\,\xi)(x_u x_v x_{uv}\,\xi) - 2(x\,x_u x_{uv}\,\xi)(x\,x_v x_{uv}\,\xi) = 0.$$

Da $\frac{\partial \beta_3}{\partial u} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial v}$ ist, so erkennt man auch hieraus, daß die F_2 sich nicht ändert, wenn man u mit v vertauscht.

---

[10]) Sind nämlich u, v, w drei Ebenen und z ihr Schnittpunkt, so ist für beliebige Punkte $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$: $\Sigma \pm (u\,\mathfrak{x})(v\,\mathfrak{y})(w\,\mathfrak{z}) = \text{konst.}\,(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,z)$.

(Eingegangen am 7. Dezember 1920.)

Über einige funktionentheoretische Ungleichungen.

Von

Leopold Fejér und Friedrich Riesz in Budapest.

Einleitung.

Ausgangspunkt und Grundlage der folgenden Entwicklungen bildet der aus dem Cauchyschen Satze der Funktionentheorie fast unmittelbar fließende Satz, laut welchem das Integral von $|f(z)|^2$ entlang eines Kreises mindestens zweimal so groß ist als das Integral von $|f(z)|^2$ entlang eines beliebigen Durchmessers dieses Kreises, wenn nur die Funktion $f(z)$ der komplexen Variablen z auf der abgeschlossenen Kreisfläche regulär-analytisch ist. Aus diesem Satze folgt dann der tiefer liegende, laut welchem dieselbe Aussage auch für $|f(z)|$ gültig ist. § 1 enthält den Beweis dieser Sätze. In § 2 wird auf Grund des zuerst erwähnten Satzes die Beschränktheit einer von Herrn Hilbert betrachteten speziellen quadratischen Form von unendlich vielen Variablen bewiesen, während § 3 hauptsächlich Anwendungen auf die konforme Abbildung enthält. Endlich wird in § 4 bewiesen, daß die eingangs erwähnten Sätze in gewissem Sinne keine weitere Verbesserung zulassen.

Unsere Entwicklungen sind mit gewissen wichtigen Untersuchungen von Herrn G. H. Hardy eng verwandt. Insbesondere verweisen wir auf Nr. 5 seiner Arbeit, A Theorem concerning Taylor's series [Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, Nr. 174 (1913)].

§ 1.

Über eine Eigenschaft des absoluten Betrages einer analytischen Funktion.

1. Satz I. *Es sei $f(z)$ eine für $|z| \leqq 1$ reguläre analytische Funktion der komplexen Veränderlichen z; dann ist*

$$\int_{-1}^{+1} |f(z)|^2 dz \leqq \tfrac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta, \tag{1}$$

wo das linksstehende Integral entlang der reellen Achse von -1 bis $+1$ zu nehmen ist.

Wir beweisen diesen Satz zunächst in dem Spezialfalle, wo $f(z)$ für $-1 \leqq z \leqq 1$ reell ist. Bezeichnen wir das linksstehende Integral mit J, so ist

$$J = \int_{-1}^{1} f^2(z)\,dz.$$

Auf Grund des Cauchyschen Satzes kann aber hier der von -1 bis $+1$ geradlinig laufende Integrationsweg sowohl durch die obere als auch durch die untere Hälfte des Einheitskreises ersetzt werden. Also ist

$$J \leqq \int |f(z)|^2\,|dz|,$$

wo das Integral sowohl entlang des oberen wie auch des unteren Halbkreises genommen werden kann. Daraus folgt durch Addition:

$$2J \leqq \int |f(z)|^2\,|dz|,$$

wo das Integral über die ganze Kreisperipherie zu erstrecken ist, w. z. b. w.

Um den Beweis auch im allgemeinen Falle zu führen, zerlegen wir $f(z)$ wie folgt:

$$f(z) = g(z) + ih(z),$$

wo die Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ für $|z| \leqq 1$ wieder regulär-analytisch und außerdem entlang der Strecke $-1 \leqq z \leqq 1$ reell sind[1]). Nun ist

$$J = \int_{-1}^{1} |f(z)|^2 dz = \int_{-1}^{1} [g^2(z) + h^2(z)]\,dz = J_1 + J_2,$$

wo

$$J_1 = \int_{-1}^{1} g^2(z)\,dz, \qquad J_2 = \int_{-1}^{1} h^2(z)\,dz.$$

Auf Grund des erledigten Spezialfalles ist aber

$$J_1 \leqq \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} |g(e^{i\theta})|^2 d\theta, \qquad J_2 \leqq \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} |h(e^{i\theta})|^2 d\theta,$$

und also

$$J = J_1 + J_2 \leqq \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \{|g(e^{i\theta})|^2 + |h(e^{i\theta})|^2\}\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} |g(e^{i\theta}) + ih(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

$$+ \frac{i}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \{g(e^{i\theta})h(e^{-i\theta}) - g(e^{-i\theta})h(e^{i\theta})\}\,d\theta.$$

---

[1]) Ist $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) z^n$, so ist $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$, $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n$ zu setzen.

Das letzte Integral verschwindet jedoch, da der Integrand in θ ungerade ist. Wir haben also gewonnen

$$J \leqq \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta,$$

w. z. b. w.

Bemerkung. Man sieht unschwer ein, daß in der Formel (1) das Gleichheitszeichen nur dann gültig ist, wenn $f(z)$ identisch verschwindet. Später (im § 4) werden wir auch sehen, daß die Konstante $\frac{1}{2}$ im Satze I durch keine kleinere ersetzt werden kann.

2. Die im Satze I ausgedrückte Eigenschaft von $|f(z)|^2$ ist auch für $|f(z)|^p$ gültig, wo p einen beliebigen positiven Exponenten bedeutet. Wir beschränken uns indessen auf den interessantesten Fall $p = 1$; der allgemeine Fall kann dann ähnlich behandelt werden.

Satz II. *Es sei $f(z)$ eine für $|z| \leqq 1$ reguläre analytische Funktion der komplexen Veränderlichen z; dann ist*

$$\int_{-1}^{+1} |f(z)|\,dz \leqq \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(e^{i\theta})|\,d\theta,$$

wo das linksstehende Integral entlang der reellen Achse von -1 bis $+1$ zu nehmen ist.

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall. $f(z)$ ist für $|z| \leqq 1$ von Null verschieden. Bezeichnet dann $\varphi(z)$ irgendeinen Zweig von $\sqrt{f(z)}$, so ergibt sich die Richtigkeit des Satzes II durch Anwendung von Satz I auf $\varphi(z)$.

2. Fall. Die Funktion $f(z)$ verschwindet im Kreisbereiche $|z| \leqq 1$. Die Anzahl ihrer Nullstellen ist dann für $|z| \leqq 1$ notwendigerweise endlich (den trivialen Fall $f(z) \equiv 0$ wollen wir außer acht lassen), und es seien $z_1, z_2, \ldots, z_k$ diese Nullstellen, wo jede ihrer Multiplizität entsprechend oft angeführt ist. Wir setzen aber zunächst voraus, daß keine der Stellen $z_1, z_2, \ldots, z_k$ auf dem Einheitskreise gelegen ist. Nun bilden wir die rationale gebrochene Funktion

$$Q(z) = \prod_{\nu=1}^{k} \frac{z - z_\nu}{1 - \bar{z}_\nu z}, \tag{2}$$

und bemerken, daß bekanntlich $|Q(z)| = 1$, wenn $|z| = 1$. Die Funktion[2])

$$f^*(z) = \frac{f(z)}{Q(z)}$$

[2]) Vgl. C. Carathéodory et L. Fejér, Remarques sur le théorème de M. Jensen, Comptes rendus, 16 juillet (1907). — Hier war uns nützlich die Kenntnis einer von Herrn Marcel Riesz herrührenden (und uns mündlich mitgeteilten) Anwendung dieser

ist dann für $|z| \leqq 1$ regulär-analytisch und $\neq 0$. Auf Grund des schon erledigten 1. Falles ist also

$$(3) \qquad \int_{-1}^{+1} |f^*(z)|\,dz \leqq \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} |f^*(e^{i\theta})|\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(e^{i\theta})|\,d\theta,$$

da doch $|Q(e^{i\theta})| = 1$. Ebendaher ist für $|z| < 1$ auch $|Q(z)| < 1$ und also

$$|f(z)| < |f^*(z)| \quad \text{für} \quad |z| < 1,$$

und schließlich auch

$$(4) \qquad \int_{-1}^{+1} |f(z)|\,dz < \int_{-1}^{+1} |f^*(z)|\,dz.$$

Die Ungleichungen (3) und (4) ergeben aber schon den zu beweisenden Satz.

Liegen auch auf der Kreislinie $|z| = 1$ selbst Nullstellen von $f(z)$, so wenden wir den eben bewiesenen Satz auf die Funktion $f(rz)$ an, wo $r < 1$, jedoch der Einheit genügend nahe angenommen ist, und lassen schließlich r zu 1 konvergieren. Mit Rücksicht auf die gleichmäßige Konvergenz von $f(rz)$ gegen $f(z)$ im Gebiete $|z| \leqq 1$ folgt dann die Gültigkeit des Satzes II auch in diesem Falle.

Schließlich bemerken wir noch, daß auch im Satze II das Gleichheitszeichen nur dann bestehen kann, wenn $f(z) \equiv 0$.

3. Die Sätze I und II lassen sich unmittelbar auf einen beliebigen Kreis und auf einen beliebigen Durchmesser desselben übertragen:

Ist die analytische Funktion $f(z)$ innerhalb und auf dem Rande eines Kreises K der z-Ebene regulär-analytisch, so ist das Integral von $|f(z)|^2$ entlang eines beliebigen Durchmessers höchstens gleich der Hälfte des Integrals von $|f(z)|^2$ entlang des Kreises K.

Entsprechend läßt sich auch Satz II *auf einen beliebigen Kreis übertragen.*

§ 2.

Anwendung von Satz I auf den Beweis einer Hilbertschen Ungleichung.

4. Wir wenden den Satz I (bzw. den an erster Stelle bewiesenen Spezialfall desselben) auf ein Polynom

$$g(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

Schlußweise auf den Beweis des Hardyschen „Mean Value Theorem" — s. S. G. H. Hardy, The Mean Value of the Modulus of an analytic Function, Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, 14 (1915), S. 269–277.

an, dessen Koeffizienten reell und nicht-negativ sind. Wir erhalten einerseits

$$\int_{-1}^{+1} |g(z)|^2 dz = \int_{-1}^{+1} g^2(z) dz = \int_{-1}^{+1} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\Big)^2 dz = 2 \sum_{i,k=0}^{n}{}' \frac{a_i a_k}{i+k+1},$$

wo der Strich bei dem Summenzeichen bedeuten soll, daß wir uns auf solche Paare der Indizes i, k beschränken, deren Summe gerade ist.

Andererseits ist

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |g(e^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2.$$

Also ist

$$\sum_{i,k=0}^{n}{}' \frac{a_i a_k}{i+k+1} \leqq \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2. \tag{5}$$

Weiter ist auf Grund von Satz I a fortiori

$$\int_0^1 g^2(z) dz \leqq \tfrac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} |g(e^{i\theta})|^2 d\theta,$$

und also

$$\sum_{i,k=0}^{n} \frac{a_i a_k}{i+k+1} \leqq \pi \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^2. \tag{6}$$

Aus den Ungleichungen (5) und (6) schließt man dann in bekannter Weise auf die Ungleichungen

$$\sum_{i,k=0}^{\infty}{}' \frac{a_i a_k}{i+k+1} \leqq \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2 \qquad (i+k = \text{gerade Zahl}), \tag{7}$$

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{a_i a_k}{i+k+1} \leqq \pi \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^2, \tag{8}$$

welche die Beschränktheit der linksstehenden positiven quadratischen Formen der unendlich vielen Variablen $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ besagen.

In der Ungleichung (8) ist insbesondere die folgende, von Herrn Hilbert[3]) herrührende Ungleichung enthalten:

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{a_i a_k}{i+k} \leqq \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2. \tag{8'}$$

[3]) S. G. H. Hardy, Note on a Theorem of Hilbert, Math. Zeitschr. 6 (1920), S. 314—317, wo in der Einleitung die verschiedenen Beweise dieses Theorems kurz besprochen werden.

§ 3.

Anwendungen allgemeiner Natur. Anwendung auf die konforme Abbildung.

5. Es sei $f(z)$ eine für $|z|<1$ reguläre analytische Funktion von z. Über das Verhalten von $f(z)$ auf dem Kreise $|z|=1$ wird nichts vorausgesetzt, dafür soll aber angenommen werden, daß entweder $\int_{-\pi}^{+\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta$, oder nur $\int_{-\pi}^{+\pi}|f(re^{i\theta})|d\theta$ für $r<1$ *unter einer von r unabhängigen Schranke verbleibe*, die wir etwa gleich 1 annehmen wollen.

Aus den Sätzen I und II (siehe insbesondere Nr. 3) folgt dann im ersten Falle

$$\int_{-r}^{+r}|f(\varrho e^{i\theta})|^2 d\varrho \leqq \tfrac{1}{2}, \qquad r<1, \tag{9}$$

im zweiten Falle

$$\int_{-r}^{+r}|f(\varrho e^{i\theta})|d\varrho \leqq \tfrac{1}{2}, \qquad r<1, \tag{10}$$

und hiermit die Konvergenz[4]) der Integrale

$$\int_{-1}^{+1}|f(\varrho e^{i\theta})|^2 d\varrho \quad \text{resp.} \quad \int_{-1}^{+1}|f(\varrho e^{i\theta})|d\varrho.$$

6. Das Interesse dieser Tatsache dürfte durch die Bemerkung erhöht werden, daß die Umstände bei den reellen harmonischen Funktionen etwas anders liegen. Aus der Beschränktheit des Quadratintegrals entlang der Kreise $|z|=r<1$ folgt auch hier, d. i. im Falle der reellen harmonischen Funktion $u(r,\theta)$, die Beschränktheit des Quadratintegrals entlang der Durchmesser. Aus der Beschränktheit von $\int_{-\pi}^{+\pi}u^2(r,\theta)d\theta$, für $r<1$, folgt nämlich dasselbe für die konjugierte harmonische Funktion $v(r,\theta)$. Es

---

[4]) Die Feststellung, daß aus der Beschränktheit von $\int_{-\pi}^{+\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta$ (für $r<1$) die Beschränktheit von $\int_{-r}^{+r}|f(\varrho e^{i\theta})|^2 d\varrho$ (für $r<1$) folgt, ist nicht neu, vielmehr in Nr. 5 der in der Einleitung im Texte zitierten Hardyschen Arbeit enthalten. Herr Hardy beweist dies auf Grund der Hilbertschen Ungleichung (8′). Wir haben nun in dieser Arbeit gezeigt, daß sowohl der Satz über die Beschränktheit von $\int_{-r}^{+r}f|(\varrho e^{i\theta})|^2 d\varrho$, als auch die Hilbertsche Ungleichung sehr leicht aus unserem Satze I erschlossen werden können, der wieder seinerseits eine unmittelbare Folgerung des Cauchyschen Satzes der Funktiontheorie darstellt. — Das in der Ungleichung (10) enthaltene Theorem wird von Herrn Hardy nicht behandelt.

ist also für die analytische Funktion $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, $z = re^{i\theta}$, das Integral

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} u^2(r, \theta) d\theta + \int_{-\pi}^{+\pi} v^2(r, \theta) d\theta$$

für $r < 1$ ebenfalls beschränkt, woraus dann die Konvergenz des Integrals von u^2 entlang des Durchmessers unmittelbar folgt. Dagegen gilt die analoge Behauptung im Falle der harmonischen Funktion für den absoluten Betrag selbst *nicht*. In der Tat ist die harmonische Funktion

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2} + r\cos\theta + \ldots + r^n \cos n\theta + \ldots = \frac{1}{2}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$$

für $r < 1$ positiv. Also ist

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |u(r, \theta)|\, d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} u(r, \theta)\, d\theta = \pi,$$

und also für $r < 1$ beschränkt.

Hingegen ist

$$\int_{-r}^{+r} |u(\varrho, 0)|\, d\varrho = \int_{-r}^{+r} u(\varrho, 0)\, d\varrho = \int_{-r}^{+r} \left(\frac{1}{1-\varrho} - \frac{1}{2}\right) d\varrho = \log\frac{1+r}{1-r} - r,$$

und also nicht beschränkt für $r < 1$.

7. Es sei $f(z)$ eine für $|z| \leqq 1$ reguläre analytische Funktion von z. Dann ist die Ableitung $f'(z)$ ebenfalls eine solche, also liefert Satz II die Ungleichung

$$\int_{-1}^{+1} |f'(z)|\, dz \leqq \tfrac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} |f'(e^{i\theta})|\, d\theta. \tag{11}$$

Die beiden hier auftretenden Integrale haben aber bekanntlich folgende geometrische Bedeutung. Bei der durch $w = f(z)$ vermittelten konformen Abbildung der Kreisfläche $|z| \leqq 1$ auf einen (im allgemeinen mehrfach bedeckten Teil) der w-Ebene gehen die Kreisdurchmesser in Kurvenbögen über, die wir etwa als „Durchmesserbilder" benennen können. Der Kreis $|z| = 1$ geht in eine geschlossene Kurve über, die wir kurz das „Kreisbild" nennen. Nun ergibt bekanntlich das linksstehende Integral in (11) die Länge des Durchmesserbildes und das rechtsstehende die Länge des Kreisbildes. Also besagt Ungleichung (11), daß *das Durchmesserbild höchstens gleich der Hälfte des Kreisbildes ist.* Dasselbe gilt natürlich für sämtliche Durchmesserbilder.

Besonders interessant ist der Spezialfall, wo $w = f(z)$ ein schlichtes Bild der Kreisfläche $|z| \leqq 1$ auf die w-Ebene entwirft. Das gewonnene Resultat läßt sich folgenderweise formulieren:

Satz III. *Ist die Kreisfläche K auf den durch die geschlossene doppelpunktlose analytische Kurve C begrenzten Bereich der Ebene konform abgebildet, so sind die den Kreisdurchmessern entsprechenden Kurvenbögen höchstens gleich der Hälfte der Länge der Kurve C.*

8. Die im letzten Satze gemachte Annahme, daß die Kurve C analytisch ist, ist nicht von Belang. Es sei jetzt C eine beliebige geschlossene, *rektifizierbare* Jordankurve der w-Ebene. Bekanntlich läßt sich das Innere der Kurve C auf das Innere des Einheitskreises der z-Ebene konform abbilden; dabei ist auch die Ränderzuordnung stetig. Die Abbildung werde durch die Funktion $w = f(z)$ vermittelt, und es bezeichne C_r das Bild des Kreises $|z| = r < 1$; L_r sei die Länge der Kurve C_r, L die Länge der Kurve C. Wäre $f(z)$ auch auf dem Einheitskreise regulär-analytisch, so könnten wir auf Grund eines Hardyschen Satzes[5]) sofort schließen, daß $L_r < L$ ist. Für den hier in Betracht kommenden allgemeinen Fall wurde dieselbe Ungleichung im Anschluß an die Hardysche Arbeit durch Herrn Paul Csillag bewiesen[6]).

Wir betrachten nun in der w-Ebene ein Durchmesserbild, d. i. einen Kurvenbogen, dem in der z-Ebene ein Durchmesser des Kreises $|z| = 1$ entspricht. Es bezeichne D_r die Länge des durch die Kurve C_r begrenzten Teiles des Durchmesserbildes. Dann ist, auf Grund des Satzes III, $D_r \leqq \frac{1}{2} L_r$, und also $D_r < \frac{1}{2} L$. Daraus folgt, daß auch das ganze Durchmesserbild eine endliche Länge D besitzt und daß auch

$$D \leqq \tfrac{1}{2} L$$

ist.

Wir haben also den folgenden Satz erhalten, der eine Verallgemeinerung von Satz III darstellt:

Satz IV. *Es sei das durch eine rektifizierbare Jordansche Kurve umgrenzte Gebiet und ein Kreisgebiet aufeinander konform bezogen. Dann entsprechen den Durchmessern des Kreises Kurvenbögen, deren Länge endlich ist, und zwar höchstens gleich der Hälfte der Länge der Jordankurve.*

9. Die Ausführungen der Nr. 8 legen die Vermutung nahe, daß der Gültigkeitsbereich der Sätze I und II wesentlich erweitert werden kann. Dies ist wirklich der Fall. Wir erinnern zunächst daran, daß wir schon in Nr. 5 die Regularität für die Kreislinie $|z| = 1$ fallen gelassen und statt dessen angenommen haben, daß entweder $\int_{-\pi}^{+\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$, oder nur

---

[5]) Siehe die in der Fußnote [2]) zitierte Arbeit von Herrn Hardy.

[6]) P. Csillag, Über die Beziehung zweier Konvergenzkriterien für Potenzreihen (ungarisch), Mathematikai és Physikai Lapok 26, Budapest 1917, S. 74 – 80.

$\int_{-\pi}^{+\pi} |f(re^{i\theta})|\,d\theta$ für $r<1$ *beschränkt* bleibt. Nun fügen wir hinzu, daß in beiden Fällen eine „*Randfunktion*" $f(e^{i\theta})$ existiert in dem Sinne, daß $\lim_{r=1-0} f(re^{i\theta})$ für fast alle θ (d. h. höchstens mit Ausnahme einer Menge vom Maße 0) vorhanden ist. Weiter ist im ersten Falle $|f(e^{i\theta})|^2$, im zweiten $|f(e^{i\theta})|$ im Lebesgueschen Sinne integrierbar[7]), und die Gültigkeit der Sätze I und II bleibt auch hier bestehen.

§ 4.

Über die „Richtigkeit" der Konstante $\frac{1}{2}$ in einigen Ungleichungen.

10. Zum Schlusse wollen wir noch die Frage nach der „richtigen" Konstante in unseren Ungleichungen entscheiden. Dabei können wir uns offensichtlich auf den Satz III beschränken, nach welchem bei der schlichten und konformen Abbildung einer Kreisfläche auf ein durch eine geschlossene analytische Kurve begrenztes Gebiet die Länge eines jeden Durchmesserbildes $\leqq \frac{1}{2}$ mal der Länge der Kurve ist. Wir behaupten, daß hier die Konstante $\frac{1}{2}$ durch keine kleinere ersetzt werden kann. Bilden wir nämlich den Einheitskreis etwa auf eine genügend abgeplattete Ellipse ab, so daß die beiden Mittelpunkte einander entsprechen, so wird die große Achse ein Durchmesserbild. Nun liegt aber bei einer genügend abgeplatteten Ellipse das Verhältnis der großen Achse zum Umfang der Ellipse beliebig nahe an $\frac{1}{2}$, woraus unsere Behauptung folgt.

Eine andere elementare Abbildung, die hier auch zum Ziele führt, ist die Abbildung des Einheitskreises $|z|<1$ durch die Funktion

$$w = \operatorname{arctg} z$$

auf den Parallelstreifen $-\frac{\pi}{2} < \Re(w) < \frac{\pi}{2}$.

Es entsprechen hier nämlich den Kreisen $|z| = r < 1$ *Ovale*, bei denen für die Länge L_r und die Länge D_r des in die imaginäre Achse fallenden Durchmesserbildes offensichtlich die Ungleichungen

$$2D_r < L_r < 2D_r + 2\pi$$

[7]) Über diese weitgehenden Verallgemeinerungen der Fatouschen Theorie vgl. F. und M. Riesz, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, Compte rendu du Quatrième Congrès des Mathématiciens Scandinaves, tenu à Stockholm du 30 août au 2 septembre 1916, publié par G. Mittag-Leffler, Uppsala 1920, S. 27—44. Ferner F. Riesz und G. Szegö, Über die Randwerte analytischer Funktionen (ungarisch), vorgelegt der Ung. Akad. der Wissenschaften (19. April 1920), in Veröffentlichung begriffen in „Mathematikai és Term. Értesitö".

bestehen, aus welchen, da $D_r \to +\infty$ strebt, wenn $r \to 1$ rückt, die Limesbeziehung

$$\frac{D_r}{L_r} \to \frac{1}{2} \qquad (r \to 1)$$

folgt.

Aus diesem Beispiele ergeben sich als Belege für die Richtigkeit der Konstante $\frac{1}{2}$ in den Sätzen II und I die Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{R}\left(\operatorname{arctg}\frac{z}{R}\right)' = \frac{1}{z^2 + R^2} \quad \text{resp.} \quad f(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}},$$

wo $R > 1$, aber gehörig nahe an 1 gelegen ist.

Budapest, den 30. Dezember 1920.

(Eingegangen am 10. Januar 1921.)

Ebene Berührungskurven zweier Rotationsflächen.

Von

Georg Scheffers in Berlin-Dahlem.

Zwei Rotationsflächen mögen zueinander windschiefe Achsen a und b haben. Wir sprechen von dem Fall, wo sich die Flächen längs einer *ebenen* Kurve k berühren. Die Ebene E dieser Kurve mag eine beliebige Lage haben; sie schneide a und b in A und B. Unter C sei der Fußpunkt desjenigen auf E errichteten Lotes l verstanden, das a und b schneidet, und zwar in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Ist P ein beliebiger Punkt der Kurve k, t seine Tangente und n seine in E gelegene Normale, so ist die den beiden Rotationsflächen in P gemeinsame Tangentenebene einerseits die Ebene durch t und durch das in P auf die Ebene (P, a) errichtete Lot, andererseits die Ebene durch t und durch das in P auf die Ebene (P, b) errichtete Lot. Da sich die Ebenen (P, a) und (P, b) in der einzigen durch P gehenden und a und b treffenden Geraden p schneiden, muß also t zu p senkrecht sein. Demnach ist n die senkrechte Projektion von p auf E. Diese Eigenschaft der Normale n der Kurve k reicht augenscheinlich auch dafür aus, daß die Kurve k durch Drehung um a und b zwei Rotationsflächen erzeugt, die einander längs k berühren. Die vier Ebenen durch p, die a, b, C und n enthalten, schneiden E in PA, PB, PC und n. Sie schneiden andererseits l in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, C und dem unendlich-fernen Punkte. Also ist das Doppelverhältnis der Strahlen PA, PB, PC und n gleich dem Verhältnis $\mathfrak{A}C : \mathfrak{B}C$. Da aber dies Verhältnis konstant ist, ergibt sich:

Diejenigen Kurven k einer Ebene E, längs deren solche Rotationsflächen einander berühren, deren Achsen a, b zueinander windschief sind und die Ebene E in A und B treffen, sind die orthogonalen Trajektorien von Klein-Lieschen W-Kurven der Ebene E[1]*). Diese W-*

[1]) „Sur une certaine famille de courbes et de surfaces", Comptes rendus 70 (1870), S. 1222–1226, 1275–1279, „Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen", Mathem. Annalen 4 (1871), S. 50–84.

Kurven haben als Grundpunkte die Punkte A, B und den Fußpunkt C desjenigen auf E errichteten Lotes, das die Achsen a und b schneidet. Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ die Schnittpunkte, so ist das konstante Doppelverhältnis der W-Kurven, nämlich das der drei Strahlen PA, PB, PC von einem Kurvenpunkte P aus und der Tangente n dieses Punktes, gleich dem Verhältnis $\mathfrak{A}C : \mathfrak{B}C$.

Aus den bekannten Eigenschaften der W-Kurven[2]) kann man mit Hilfe dieses Satzes bemerkenswerte Paare von Rotationsflächen ableiten, die einander längs ebener Kurven berühren. Wir wollen nur noch daran erinnern, daß man diese Paare von Rotationsflächen als Oberflächen von Rotationskörpern benutzen kann, die dazu dienen, eine gleichmäßige Drehung um eine Achse a durch Reibung in eine gleichmäßige Drehung um eine zu a windschiefe Achse b zu übertragen.

---

[2]) Siehe den Enzyklopädieartikel „Besondere transzendente Kurven“ (III D 4), Nr. 13—19.

(Eingegangen am 23. Mai 1921).

Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Satz: *Es sei*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots,\ \lambda_n \to \infty) \tag{1}$$

eine Dirichletsche Reihe mit Konvergenzgebiet. Die durch (1) *definierte Funktion* $f(s)$ *sei für* $\sigma > \eta$ *regulär und beschränkt:*

$$|f(s)| < K. \tag{2}$$

1. *Falls für jedes* $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O\left(e^{e^{\lambda_n \varepsilon}}\right) \tag{3}$$

ist, konvergiert (1) *für* $\sigma > \eta$ *und zwar gleichmäßig für* $\sigma > \eta + \varepsilon$.

2. *Falls*

$$\frac{\log n}{\lambda_n} \to 0 \tag{4}$$

ist, konvergiert (1) *absolut für* $\sigma > \eta$.

Vorbemerkung: In einer Arbeit gleichen Titels[1]) hat Herr Bohr (weniger einfach) bereits bewiesen: Teil 1 des entsprechenden Satzes, wenn (3) durch die schärfere Voraussetzung $\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O(e^{\lambda_n k})$ (mit irgendeinem k) ersetzt wird; Teil 2 vollständig.

Beweis: 1. Es sei

$$s_0 = \sigma_0 + t_0 i, \quad \sigma_0 > \eta + \varepsilon, \quad \omega_n = e^{e^{\lambda_n \frac{\varepsilon}{2}}}, \quad A(x) = \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n e^{-\lambda_n s_0}.$$

---

[1]) Journal für die reine und angewandte Mathematik **143** (1913), S. 203–211.

Nach einem Perronschen Satz, (2) und (3) ist bei passendem $\gamma > 0$

$$|A(\lambda_n) - f(s_0)| = \left| \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} A(y)\,dy - f(s_0) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - \infty i}^{\gamma + \infty i} \frac{e^{\lambda_{n+1} s} - e^{\lambda_n s}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \frac{f(s+s_0)}{s^2} ds - f(s_0) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\varepsilon - \infty i}^{-\varepsilon + \infty i} \frac{e^{\lambda_{n+1} s} - e^{\lambda_n s}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \frac{f(s+s_0)}{s^2} ds \right| < \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Min.} \left(|s|\, e^{-\lambda_n \varepsilon}, \frac{2 e^{-\lambda_n \varepsilon}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \right) \frac{K}{|s|^2} dt$$

$$< K e^{-\lambda_n \varepsilon} \left(\int_0^1 \frac{dt}{\varepsilon} + \int_1^{\omega_n} \frac{dt}{t} + K_1(\varepsilon)\, \omega_n \int_{\omega_n}^{\infty} \frac{dt}{t^2} \right) = K e^{-\lambda_n \varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} + e^{\lambda_n \frac{\varepsilon}{2}} + K_1(\varepsilon) \right) \to 0.$$

2. Bei passendem $\gamma > \eta$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ist wegen (2) und (4)

$$|a_n|\, e^{-\lambda_n (\eta + \varepsilon)} = \left| \lim_{T = \infty} \frac{1}{2T i} \int_{\gamma - Ti}^{\gamma + Ti} f(s)\, e^{\lambda_n (s - \eta - \varepsilon)}\, ds \right|$$

$$= \left| \lim_{T = \infty} \frac{1}{2T i} \int_{\eta + \frac{\varepsilon}{2} - Ti}^{\eta + \frac{\varepsilon}{2} + Ti} f(s)\, e^{\lambda_n (s - \eta - \varepsilon)}\, ds \right| \leqq K e^{-\lambda_n \frac{\varepsilon}{2}} < K_2(\varepsilon)\, e^{-2 \log n}.$$

Göttingen, den 26. Juli 1921.

(Eingegangen am 27. Juli 1921.)

Über eine Eigenschaft der klassischen Greenschen Funktion.

Von

Leon Lichtenstein in Münster i. W.

Es sei T ein beliebiges einfach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet im Raume, dessen Begrenzung S aus geschlossenen, einander nicht schneidenden oder berührenden Flächen mit stetiger Normale besteht. Ist δ die geradlinige Entfernung zweier Punkte auf S, θ der von den zugehörigen Normalen eingeschlossene Winkel, so ist überdies

$$\theta < \alpha\delta^{\lambda}, \qquad 0 < \lambda < 1 \qquad (\alpha \text{ konstant}). \tag{1}$$

Es sei (ξ, η, ζ) irgendein Punkt im Innern von T und es möge $G(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)$ die in (ξ, η, ζ) wie $\frac{1}{r}$ $(r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2)$ unstetige, auf S verschwindende Greensche Funktion der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ bezeichnen. Es sei ferner s ein beliebiger Punkt auf S und (n) die in das Innere von T gerichtete Normale von S in s. Nach bekannten Sätzen hat G auf S stetige partielle Ableitungen erster Ordnung und insbesondere die stetige Normalableitung $\frac{\partial G}{\partial n}$. Da für alle (x, y, z) in T, wie man weiß, $G(\xi, \eta, \zeta; x, y, z) > 0$ ist, so ist augenscheinlich

$$\frac{\partial}{\partial n} G(\xi, \eta, \zeta; s) \geqq 0. \tag{2}$$

Tatsächlich gilt die schärfere Ungleichheit

$$\frac{\partial}{\partial n} G(\xi, \eta, \zeta; s) > 0. \tag{3}$$

Dieser wichtige Satz ist zunächst unter gewissen weiteren einschränkenden Voraussetzungen über die Natur der Begrenzung von den Herren C. Neumann und A. Korn bewiesen worden. Für stetig gekrümmte ebene Gebiete habe ich vor einiger Zeit einen sehr einfachen Beweis gegeben, in dem Umfange des Textes ist er einige Jahre später von Herrn O. D. Kellogg dargetan worden[1]). In den folgenden Zeilen möchte ich den besonders

[1]) Vgl. C. Neumann, Über die Methode des arithmetischen Mittels, zwei Abhandlungen, Leipzig 1887/88 (aus dem 13. und 14. Bande der Abh. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Nr. IX und XIII), zweite Abhandlung, S. 662—705; A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie, Berlin 1899, 2. Band, S. 348—354; L. Lichtenstein, Math. Annalen 67 (1909), S. 559—575 [S. 561—563]; O. D. Kellogg, Trans. of the Amer. Math. Soc. 13 (1912), S. 109—123.

einfachen Beweis mit geringen Änderungen reproduzieren, den ich vor drei Jahren in einer Arbeit über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten gegeben habe[2]).

Sei (X, Y, Z) ein Punkt in T auf (n), dem Punkte s so nahe, daß s der (X, Y, Z) am nächsten liegende Punkt von S wird. Es gilt

$$G(X, Y, Z; x, y, z) = \frac{1}{d} + g(X, Y, Z; x, y, z), \tag{4}$$

unter d die Entfernung der Punkte (X, Y, Z) und (x, y, z) und g diejenige in T und auf S stetige, in T reguläre Potentialfunktion verstanden, die in einem Punkte (x', y', z') auf S den Wert

$$-[(X-x')^2+(Y-y')^2+(Z-z')^2]^{-\frac{1}{2}}$$

annimmt. Die Randfunktion ist negativ und nimmt in s den kleinsten Wert an. Es gilt dann, da auch g auf S stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat,

$$\frac{\partial}{\partial n} g(X, Y, Z; s) \geqq 0. \tag{5}$$

Die Normalableitung der Potentialfunktion $\frac{1}{d}$ ist in s positiv. Demnach ist

$$\frac{\partial}{\partial n} G(X, Y, Z; s) > 0. \tag{6}$$

Es ist nun leicht zu zeigen, daß für *alle* (ξ, η, ζ) in T die Ungleichheit (3) gilt.

In der Tat ist $\frac{\partial}{\partial n} G(\xi, \eta, \zeta; s)$ bei festgehaltenem s eine in T reguläre, in T und auf S, mit der einzigen Ausnahme des Punktes s, stetige Potentialfunktion. Sei K eine Kugelfläche um s als Mittelpunkt durch (X, Y, Z) und es sei Θ derjenige Teil von T, der außerhalb von K liegt. Auf dem Rande von Θ ist $\frac{\partial}{\partial n} G(\xi, \eta, \zeta; s)$ nicht negativ, wegen (6) kommen positive Werte wirklich vor. Offenbar ist demnach in Θ gewiß $\frac{\partial}{\partial n} G(\xi, \eta, \zeta; s) > 0$. Da die vorstehenden Überlegungen für alle (X, Y, Z) in hinreichender Nähe von s gelten, so ist hiermit unser Satz vollständig bewiesen.

Münster i. W., den 12. November 1921.

---

[2]) Vgl. L. Lichtenstein, Berliner Sitzungsberichte, 1918, S. 1120–1135 [S. 1130–1131].

(Eingegangen am 12. November 1921.)